technische universität
dortmund

fakultät für
mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
M. Urban

Wintersemester 2016/17
19.01.2017

Kontinuumsmechanik

Blatt 12

Abgabe am Montag, den 30.01.2017, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Skalierung von Strömung im geraden Rohr).

Für $Q \subset \mathbb{R}^{N-1}$ ist ein gerades Rohr mit Querschnitt Q gegeben durch $\Omega = \mathbb{R} \times Q$. Für geeignetes $u\colon Q \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung der stationären Navier-Stokes Gleichungen mit Haft-Randbedingungen gegeben durch $v(x, y) = u(y)e_1$ und $p(x, y) = p(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in Q$. Geben Sie mit Hilfe einer Skalierung für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Lösung der stationären Navier-Stokes Gleichungen im geraden Rohr mit Querschnitt εQ an. Wie verhält sich bei konstanter Viskosität $\bar{\nu} > 0$ und konstantem Druckabfall der Gesamt-Fluss in Abhängigkeit von ε?

Aufgabe 2 (Die Stokes Gleichung als Sattelpunktproblem).

Wir betrachten für $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $p \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ den Ausdruck

$$\Psi(v, p) := \int_\Omega \{|\nabla v|^2 + p\,\nabla \cdot v\}\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass das Sattelpunktproblem $\inf_v \sup_p \Psi(v, p)$ äquivalent zur Minimierungsaufgabe des Stokes Problems ist. Zeigen Sie, dass jede Lösung (v, p) von $D\Psi(v, p) = 0$ eine Lösung der Stokes Gleichungen ist.

Aufgabe 3 (Kern und Bild im Endlichdimensionalen).

Wir betrachten zwei adjungierte lineare Abbildungen im Endlichdimensionalen, $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $D = G^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit einem Dimensionsargument, dass $\ker(D)^\circ = \ker(D)^\perp = R(G)$ gilt.

Aufgabe 4 (Satz vom abgeschlossenen Bild).

Zeigen Sie für reflexive Banachräume die im Text nicht bewiesenen Implikationen von Satz 23.4 in [Buch].