technische universität dortmund
fakultät für mathematik

PROF. DR. B. SCHWEIZER
M. URBAN

WINTERSEMESTER 2016/17
01.12.2016

Kontinuumsmechanik

Blatt 7

Abgabe am Montag, den 12.12.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Zeitschrittverfahren für eine Differentialinklusion).
Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung [Buch, Gleichung (15.15), Seite 291]. Gegeben seien Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ und ein Startwert $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \in \partial\chi(Y(t_k) - u_k)$$

eine Lösung $(u_1, \ldots, u_N)$ besitzt. Überlegen Sie sich die geometrische Bedeutung des Verfahrens in dem Fall, dass χ die Indikatorfunktion einer konvexen Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Anleitung: Betrachten Sie zu einem vorgegebenem Wert u_{k-1} das Funktional $A\colon \mathbb{R}^n \to \hat{\mathbb{R}}$,

$$A(u) := \frac{1}{2(t_k - t_{k-1})} \|u - u_{k-1}\|^2 + \chi(Y(t_k) - u)\,.$$

Stellen Sie fest, dass A ein Minimum $u = u_k \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Schließen Sie aus $0 \in \partial A(u_k)$ die Lösungseigenschaft.

Aufgabe 2 (Relationen der von-Mises Plastizität).
Weisen Sie die expliziten Relationen [Buch, (27.13) - (27.15), Seite 559] nach.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Wertebereich der schwachen Grenzfunktion).

Für ein Grundgebiet $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$, eine Zielmenge $\mathbb{R}^M$ und eine Folge $\delta \to 0$ sei $u_\delta \colon \Sigma \to \mathbb{R}^M$ eine schwach konvergente Folge von Funktionen, $u_\delta \rightharpoonup u$ in $L^2(\Sigma)$. Für eine Folge von Potentialfunktionen $0 \leq \Psi_\delta \colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ und eine konvexe und abgeschlossene Menge $0 \in K \subset \mathbb{R}^M$ gelte $\Psi_\delta(v) \geq \delta^{-1}$ für alle $v \notin K$. Zeigen Sie, dass eine δ-unabhängige Abschätzung

$$\int_\Sigma \Psi_\delta(u_\delta) \leq C_0$$

impliziert, dass $u(x) \in K$ gilt für fast alle $x \in \Sigma$.

Anleitung: Betrachten Sie die Menge gutartiger Punkte $G_\delta \coloneqq \{x \in \Sigma \mid u_\delta(x) \in K\}$ *und die charakteristischen Funktionen* $\chi_\delta \coloneqq \mathbb{1}_{G_\delta}$ *und weisen Sie*

$$\int_\Sigma |\chi_\delta(x) - 1|^2 \, dx \to 0$$

nach. Schließen Sie aus dieser starken Konvergenz $\chi_\delta \to \mathbb{1}_\Sigma$ *für das Produkt die schwache Konvergenz* $u_\delta \chi_\delta \rightharpoonup u$ *in* $L^1(\Sigma)$*. Folgern Sie aus* $u_\delta(x)\chi_\delta(x) \in K$ *für alle* $x \in \Sigma$*, dass* $u(x) \in K$ *für fast alle* $x \in \Sigma$*.*