technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
M. Urban

Wintersemester 2016/17
24.11.2016

# Kontinuumsmechanik

## Blatt 6

Abgabe am Montag, den 05.12.2016, in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1 (Testfunktionen in der Definition der Quasikonvexität).**
Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle für alle offenen und beschränkten Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jede Matrix $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und jede Funktion $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ die Ungleichung

$$f(\xi) \leq \fint_\Omega f\Big(\xi + \nabla\varphi(x)\Big)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Weiterhin gäbe es ein $p \in (1,\infty)$ und eine Konstante $C > 0$, so dass $f$ der Wachstumsbedingung $0 \leq f(\xi) \leq C(1+|\xi|^p)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genüge. Zeigen Sie, dass (1) dann auch für alle $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ erfüllt ist. In welchem Beweisschritt verwenden Sie die Beschränktheit der Mengen $\Omega$?
*Hinweis: Verwenden Sie die Dichtheit glatter Funktionen in $W_0^{1,p}(\Omega)$ und den starken Lebesgueschen Konvergenzsatz.*

**Aufgabe 2 (Konvexe Analysis).**

i) Wiederholen Sie folgende Begriffe aus der konvexen Analysis: konvexe Funktion, konvexe Menge, Fenchel-Konjugierte und Subdifferential. (Sie können beispielsweise Kapitel 15.1 im [Buch] lesen.)

ii) Wir betrachten die Funktionen $F, G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeben durch $F(x) := \langle c, x\rangle - b$ für $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $G(x) := |x|$. Bestimmen Sie die Fenchel-Transformierten von $F$ und $G$. Vergewissern Sie sich, dass für beide Funktionen die Relationen aus [Buch, Theorem 15.5] gelten.