technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
M. Urban

Wintersemester 2016/17
10.11.2016

Kontinuumsmechanik

Blatt 4

Abgabe am Montag, den 21.11.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Schwingungsgleichung für Saiten).

In der Vorlesung wurde ein Modell für die statische Beschreibung einer Saite hergeleitet. Dieselbe Herleitung liefert auch in zeitabhängigen Problemen eine Evolutionsgleichung für die Positionsvariable $\Phi\colon [0,L]\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$, $(x,t)\mapsto\Phi(x,t)$. Hierbei seien $T, L>0$. Bezeichnen wir die Massendichte der Saite im Punkt x mit $\rho(x)$, so ergibt sich die Schwingungsgleichung

$$\rho(x)\partial_t^2\Phi(x,t) = \partial_x\left(\tilde\sigma(\|\partial_x\Phi(x,t)\|\frac{\partial_x\Phi(x,t)}{\|\partial_x\Phi(x,t)\|}\right) + f(x,t) \tag{1}$$

für alle $(x,t)\in(0,L)\times(0,T)$

Auch die Saite eines Instruments ist eine Saite in unserem Sinne. Überzeugen Sie sich, dass, bei konstanter Dichte ρ_0 und ohne äußere Kraft f, die Linearisierung der Gleichung (1) die Wellengleichung $\rho_0\partial_t^2 u = \sigma_0\partial_x^2 u$ ergibt. Geben Sie die Frequenzen einer schwingenden Saite der Länge L in Abhängigkeit von σ_0, ρ_0 und L an.

Aufgabe 2 (Scherung in der Cauchy-Theorie).

Wir betrachten die Cauchy-Theorie aus Proposition (26.1) in [Buch] im dreidimensionalen Raum, $x=(x_1,x_2,x_3)$. Für $\varepsilon\in\mathbb{R}$ ist eine *Scherung* gegeben durch

$$\Phi(x) = x + \varepsilon x_2 e_1 \quad \text{mit} \quad \nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix}1 & \varepsilon & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den linken Cauchy-Green Spannungstensor und seine Eigenwerte. Geben Sie das entsprechend konkretisierte Materialgesetz (26.18) aus [Buch] an.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Die Kettengleichung).

i) Wir betrachten $n = 2$ und eine Gewichtskraft $f(x) = -\rho e_2$ mit $\rho \in \mathbb{R}$. Für die Lösung $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ der Gleichung

$$-\partial_x\Big(s(x)\partial_x\Phi(x)\Big) = f(x)\,, \qquad \|\partial_x\Phi(x)\| = 1\,. \tag{2}$$

nehmen wir an, dass sie als Graph geschrieben werden kann, dass also eine Abbildung $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\Phi_2(x) = Y(\Phi_1(x))$ für alle $x \in I$ gilt. Leiten Sie für Y die Kettengleichung

$$\partial_\xi^2 Y(\xi) = k\rho\sqrt{1 + |\partial_\xi Y(\xi)|^2} \tag{3}$$

her, wobei $k \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante ist, die aus den Randwerten bestimmt werden muss.
Anleitung: Eliminieren Sie $\partial_x\Phi_2$ mit Hilfe der Gleichung $\Phi_2(x) = Y(\Phi_1(x))$, dann $\partial_x\Phi_1$ unter Verwendung von $\|\partial_x\Phi(x)\| = 1$. Mit der ersten Komponente der ersten Gleichung in (2) *eliminieren Sie s bis auf eine Integrationskonstante k. Die zweite Komponente der Gleichung liefert* (3).

ii) Überzeugen Sie sich, dass cosh explizite Lösungen der Kettengleichung (3) liefert. Lösen Sie das Randwertproblem $Y(a) = y_l$ und $Y(b) = y_r$ für vorgegebene Daten $a, b, y_l, y_r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (Kreuzprodukt nach einer Transformation).

Zeigen Sie für eine invertierbare Matrix $F \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Regel

$$(Fa) \times (Fb) = \det(F)\,(F^{-1})^T(a \times b)\,.$$