technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PROF. DR. B. SCHWEIZER
M. URBAN

WINTERSEMESTER 2016/17
03.11.2016

Kontinuumsmechanik

Blatt 3

Abgabe am Montag, den 14.11.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1.

Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Lipschitzgebiet. Der Rand $\partial\Omega$ sei disjunkt zerlegt in einen Dirichletrand Γ_D mit $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_D) > 0$ und einen Neumannrand Γ_N. Der Elastizitätstensor $\mathbb{A}\colon \mathbb{R}^{n\times n}_s \to \mathbb{R}^{n\times n}_s$ sei symmetrisch und koerziv, d.h. es existiere eine Konstante $\gamma > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\mathbb{A}\xi : \xi \geq \gamma \|\xi\|^2$. Weiterhin seien eine Volumenkraft $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega,\mathbb{R}^n))$ sowie Anfangsdaten $u_0 \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ gegeben. Es gelte die Kompatibilität $u_0 = 0$ auf Γ_D. Beweisen Sie eine a priori Abschätzung für eine klassische Lösung u der instationären Elastizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \nabla \cdot \sigma &= f && \text{in } \Omega \times (0,T)\,, \\ \sigma &= \mathbb{A}\nabla^s u && \text{in } \Omega \times (0,T)\,, \end{aligned}$$

mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \times [0,T]\,, \\ \nu \cdot \sigma &= 0 && \text{auf } \Gamma_N \times [0,T]\,, \end{aligned}$$

und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(\cdot,0) &= u_0 && \text{in } \Omega\,, \\ \partial_t u(\cdot,0) &= u_1 && \text{in } \Omega\,. \end{aligned}$$

Anleitung: Testen Sie die Gleichung mit $\partial_t u$ und stellen Sie eine Gleichung für die Energie $E = E_{pot} + E_{kin}$ auf, $E_{kin} := \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_t u|^2$ und $E_{pot} := \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla^s u : \mathbb{A}\nabla^s u$. Schätzen Sie die Energie $E\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ mit Hilfe des Lemmas von Gronwall auf $[0,T]$ ab. Folgern Sie die Beschränktheit der Lösung u in $L^\infty(0,T; H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)) \cap W^{1\infty}(0,T; L^2(\Omega,\mathbb{R}^n))$. Die Schranke soll dabei nur von f, Ω, T, Γ_D, u_0 und u_1 abhängen.

(Bitte wenden)

Aufgabe 2.

Für $n \geq 1$ sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix, d.h. $B = -B^T$. Sei $\ker B$ der Kern der Matrix B. Zeigen Sie: Falls $\dim \ker B \geq n-1$, dann gilt: $B = 0$.

Aufgabe 3.

Sei $L > 0$ und $I \coloneqq [-L, 0]$. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, so dass für jede Funktion $g \in C^1(I)$ mit $g(-L) = 0$ gilt:

$$\int_{-L}^{0} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_{-L}^{0} |x|^2 |g'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz der Differentialrechnung und Fubini.