Blatt 11 20.01.2015

Übungen zur Vorlesung

Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

1) Die Kettengleichung.

Wir betrachten $n = 2$ und eine Gewichtskraft $f(x) = -\rho e_2$ mit $\rho \in \mathbb{R}$. Für die Lösung $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ der Gleichung

$$-\partial_x \left(s(x)\partial_x \Phi(x)\right) = f(x)\,, \qquad \|\partial_x \Phi(x)\| = 1\,. \tag{1}$$

nehmen wir an, dass sie als Graph geschrieben werden kann, dass also eine Abbildung $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\Phi_2(x) = Y(\Phi_1(x))$ gilt für alle $x \in I$. Leiten Sie für $Y : \xi \to Y(\xi)$ die Kettengleichung her,

$$\partial_\xi^2 Y(\xi) = k\rho\sqrt{1 + |\partial_\xi Y(\xi)|^2}\,, \tag{2}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante ist, die aus den Randwerten bestimmt werden muss.
Anleitung: Eliminieren Sie $\partial_x \Phi_2$ mit Hilfe der Gleichung $\Phi_2(x) = Y(\Phi_1(x))$, dann $\partial_x \Phi_1$ unter Verwendung von $\|\partial_x \Phi(x)\| = 1$. Mit der ersten Komponente der ersten Gleichung in (1) eliminieren Sie s bis auf eine Integrationskonstante k. Die zweite Komponente der Gleichung liefert (2).

2) Explizite Lösung der Kettengleichung.

Überzeugen Sie sich, dass cosh explizite Lösungen der Kettengleichung (2) liefert. Lösen Sie das Randwertproblem $Y(a) = y_l$ und $Y(b) = y_r$ für vorgegebene Daten $a, b, y_l, y_r \in \mathbb{R}$.

3) Instabilität eines Stabes unter Belastung.

Linearisieren Sie die Gleichung

$$\partial_x(A\,\partial_x\theta(x)) + F\sin(\theta(x)) = 0$$

für Eulers Elastica mit $x \in (0, L)$ und Randwerten $\partial_x\theta(0) = \partial_x\theta(L) = 0$ um die triviale Lösung $\theta \equiv 0$. Berechnen Sie einen kritischen Wert für die Kraft, $F_* = F_*(A, L)$, so dass Folgendes gilt:

1. Für Kräfte $0 < F < F_*$ hat die linearisierte Gleichung nur eine Lösung, nämlich die triviale Lösung.

2. Für die Kraft $F = F_*$ hat die linearisierte Gleichung unendlich viele Lösungen.

Zur Information: Bei Ausübung einer Kraft $F > F_*$ ist die Ruhelösung $\theta \equiv 0$ für den Stab nicht mehr stabil, ein realer Stab nimmt anstelle der geraden Form (unter Kompression) lieber eine gekrümmte Form ein. Auch die Lösung der nichtlinearen Gleichung ist für $F \geq F_*$ nicht mehr eindeutig, allerdings sorgt die Nichtlinearität dafür, dass für jedes F nur endlich viele Lösungen existieren.

4) Scherung in der Cauchy-Theorie.

Wir betrachten die Cauchy-Theorie aus Proposition (26.1) in [Schweizer PDE] im dreidimensionalen Raum, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist eine *Scherung* gegeben durch

$$\Phi(x) = x + \varepsilon x_2 e_1 \quad \text{mit} \quad \nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den linken Cauchy-Green Spannungstensor und seine Eigenwerte. Geben Sie das entsprechend konkretisierte Materialgesetz (26.18) aus [Schweizer PDE] an.

Abgabe am 27.01.2015.