Blatt 10 06.01.2015

Übungen zur Vorlesung

Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

1) Lamé-Konstanten II: reine Zugbelastung.

Wir betrachten wieder $\mathbb{A} : e \mapsto 2\mu\, e + \lambda\, \mathrm{spur}(e)\ \mathrm{id}$. Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{A}$ invertieren lässt mit der Gleichung

$$e = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma - \frac{\lambda}{2\mu + n\lambda}\mathrm{spur}(\sigma)\ \mathrm{id}\right) .$$

Für $n = 3$ und $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ ist eine *reine Zugdeformation* gegeben durch $u(x) = \varepsilon x_1 e_1 + \delta x_2 e_2 + \delta x_3 e_3$

$$\text{mit} \quad \nabla^s u(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} , \quad \text{falls} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie ε und δ in Abhängigkeit von λ, μ und $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die Verbindung zum Young'schen Elastizitätsmodul μ_Y her.
Bemerkung: Der Quotient $\nu := (-\delta)/\varepsilon$ heißt Poissonzahl. Er gibt das Verhältnis von lateraler Stauchung $(-\delta)$ zur Ausdehnung in Zugrichtnug ε an.

2) Energieminimierung.

Der Elastizitätstensor $\mathbb{A}$ sei symmetrisch. Zeigen Sie, dass sich die Lösung u der Elastizitätsgleichungen

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x), \qquad \sigma(x) = \mathbb{A} \cdot e(x), \qquad e(x) = \nabla^s u(x)$$

charakterisieren lässt als der Minimierer der Energie

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla^s u : \mathbb{A}\nabla^s u - \int_\Omega f \cdot u \,.$$

3) Korn'sche Ungleichung.

Beweisen Sie Theorem 25.5 aus [Schweizer PDE] mit Hilfe von Theorem 25.4 aus [Schweizer PDE].

4) Gewichtete Poincaré Abschätzung.

Wir betrachten auf dem Intervall $I := [-L, 0]$ eine Funktion $g \in C^1(I)$ mit $g(-L) = 0$. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert mit

$$\int_{-L}^{0} |g(x)|^2 \, dx \leq C \int_{-L}^{0} |x|^2 |g'(x)|^2 \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz der Differentialrechnung und Fubini.

Abgabe am 20.01.2015.