Blatt 9 16.12.2014

Übungen zur Vorlesung

Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

1) Differentialoperator der Elastizität.

Sei $\mathbb{A}$ der Elastizitätstensor $\mathbb{A} : e \mapsto 2\mu\, e + \lambda\, \mathrm{spur}(e)\,\mathrm{id}$. Zeigen Sie, dass sich

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x), \qquad \sigma(x) = \mathbb{A} \cdot e(x), \qquad e(x) = \nabla^s u(x) \tag{1}$$

schreiben lässt als

$$-\mu \Delta u - (\mu + \lambda)\nabla(\nabla \cdot u) = f\,.$$

Folgern Sie für $f = 0$ und glatte Lösungen u, dass $\nabla \cdot u$ und (in 2 und 3 Dimensionen) $\mathrm{curl}\, u$ harmonisch sind. Schließen Sie daraus, dass u biharmonisch ist, $\Delta\Delta u = 0$.

2) Lamé-Konstanten I: Scherung und Kompression.

Wir betrachten die Elastizitätsgleichungen (1) im dreidimensionalen Raum $x = (x_1, x_2, x_3)$, wobei $\mathbb{A}$ durch $\mathbb{A} : e \mapsto 2\mu\, e + \lambda\, \mathrm{spur}(e)\,\mathrm{id}$ mit beliebigen Lamé-Konstanten λ und μ gegeben ist. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist eine *Scherung* gegeben durch

$$u(x) = \varepsilon x_2 e_1 \quad \text{mit} \quad \nabla^s u(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und eine *gleichmäßige Kompression/Expansion* ist gegeben durch

$$u(x) = \varepsilon x \quad \text{mit} \quad \nabla^s u(x) = \varepsilon \mathrm{id}\,.$$

Zeigen Sie, dass Scherung und Kompression Lösungen der Elastizitätsgleichungen sind und bestimmen Sie den Spannungstensor σ.

3) Rekonstruktion zweiter Ableitungen.

Verifizieren Sie für $e := \nabla^s u$ die algebraische Beziehung

$$\partial_j \partial_k u_i = \partial_j e_{ik} + \partial_k e_{ij} - \partial_i e_{jk}\,.$$

Abgabe am 06.01.2015.