Blatt 8 02.12.2014

Übungen zur Vorlesung

Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

1) Konvergenz in L^p und L^q.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$, und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$, also $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie für $1 \le q < p < \infty$:

$$u_k \rightharpoonup u \ \textit{schwach} \text{ in } L^p(\Omega) \iff u_k \rightharpoonup u \ \textit{schwach} \text{ in } L^q(\Omega).$$

Hinweis: Verwenden Sie die schwache Kompaktheit von Kugeln in $L^p(\Omega)$ und die Tatsache, dass $\int_\Omega u\,\varphi = 0\,\forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ die Identität $u \equiv 0$ impliziert.

b) Zeigen Sie für $1 \le s < q < p < \infty$

$$u_k \to u \ \textit{stark} \text{ in } L^s(\Omega) \iff u_k \to u \ \textit{stark} \text{ in } L^q(\Omega).$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass ohne Einschränkung $u = 0$ angenommen werden kann. Verwenden Sie die elementare Abschätzung (24.23) aus Lemma 24.5 im Buch [Schweizer,PDE].

c) Gilt b) auch für $q = p$? Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel für $p = 2$ und $s = 1$ mit Hilfe einer Folge der Form

$$u_k(x) := \begin{cases} k & \text{für } x \in (0, \delta_k) \\ 0 & \text{für } x \in [\delta_k, 1)\,. \end{cases}$$

2) Die Spur ist in $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Wir betrachten auf dem Rechteck $R := (0, L)\times(-1, 1)$ eine Funktion $U \in C^1(R,\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger. Die Spur ist $u(x_1) = \mathrm{spur}(U)(x_1) = U(x_1, 0)$. Zeigen Sie eine Abschätzung

$$\|u\|_{H^{1/2}(0,L;\mathbb{R})} \le C\|U\|_{H^1(R)}\,.$$

Die Ungleichung impliziert, dass der Spuroperator zu einem stetigen Operator $\mathrm{spur} : H_0^1(R) \to H_0^{1/2}(0, L;\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann.

Anleitung: Verwenden Sie die Fourier-Transformation in der Variablen x_1 mit der dualen Variablen ξ.
Schreiben Sie $|\xi|\,|\hat{u}(\xi, x_2 = 0)|^2 = 2\int_{-1}^{0} |\xi|\,\hat{u}(\xi, x_2)\,\partial_{x_2}\hat{u}(\xi, x_2)\,dx_2$, verwenden Sie Fubini und Cauchy-Schwarz.

3) Keine Stetigkeit im Hilbertraum für $p < 2$.

Theorem 10.9 im Buch [Schweizer, PDE] liefert für $p = 2$ eine stetige Einbettung $L^2(0, T; V) \cap W^{1,p}(0, T, V') \hookrightarrow C^0([0, T], H)$. Zeigen Sie, dass für allgemeine Gelfand-Tripel (V, H, V'), siehe (10.22) im Buch [Schweizer, PDE], und $p < 2$ *keine* derartige Einbettung existiert.
Anleitung: Verwenden Sie ein Gelfand-Tripel, in dem eine Folge $v_k \in V$ existiert mit $\|v_k\|_H^2 = \|v_k\|_V \|v_k\|_{V'} = 1$ und $\|v_k\|_V \to \infty$. Betrachten Sie stückweise affine Funktionen $u_k : [0, T] \to V$ mit $u_k(0) = v_k$ und $u_k(t) = 0\ \forall t \geq \delta_k$, für eine geeignet gewählte Folge $\delta_k \to 0$.

Abgabe am 09.12.2014.