Blatt 7 25.11.2014

Übungen zur Vorlesung

# Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

## 1) Interpolation von Sobolev-Räumen.

Sei $I = (0, T)$ ein Zeitintervall, zur Vereinfachung der Notation betrachten wir hier $T = 2\pi$, $X$ sei ein Hilbertraum. Für $\alpha \geq 0$ können Sobolevräume $H^\alpha(I, X)$ definiert werden mit Hilfe der Koeffizienten der Fourier-Reihe, $a_k := \int_I e^{-ikt} u(t)\, dt$ für $k \in \mathbb{Z}$. Eine Norm auf $H^\alpha(I, X)$ ist damit gegeben durch

$$\|u\|^2_{H^\alpha(I,X)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k|^{2\alpha}) \|a_k\|^2_X \,.$$

Für ein weiteres Intervall $\Omega = (0, 2\pi)$ betrachten wir nun Funktionen $u : I \to L^2(\Omega)$. Zeigen Sie für $\alpha \in (0, 1)$, dass eine stetige Einbettung

$$H^1(I, L^2(\Omega)) \cap L^2(I, H^2(\Omega)) \hookrightarrow H^\alpha(I, H^{2-2\alpha}(\Omega, \mathbb{R}))$$

existiert.

Anleitung: Entwickeln Sie eine Funktion $u \in L^2(I, L^2(\Omega))$ in einer zweifachen Fourier-Reihe als

$$u(t, x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_{k,l} e^{ikt} e^{ilx}$$

und schreiben Sie die Normen als

$$\|u\|^2_{H^1(I,L^2(\Omega))} = C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (1 + |k|^2) |b_{k,l}|^2 \,, \ \|u\|^2_{L^2(I,H^2(\Omega))} = C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (1 + |l|^4) |b_{k,l}|^2 \,.$$

Sie erhalten die Abschätzung in $H^\alpha(I, H^{2-2\alpha}(\Omega, \mathbb{R}))$, indem Sie die entsprechende Norm ausschreiben und die Young'sche Ungleichung anwenden.

## 2) Zeitregularität $W^{1,1}$ und $H^{1/2}$.

Sei $X$ ein Hilbertraum, $T > 0$, wir betrachten die Räume $W^{1,1}_0(0, T; X)$ und $H^\alpha_0(0, T; X)$. Zeigen Sie:

a) Für $\alpha \in (0, 1/2)$ gilt $W^{1,1}_0(0, T; X) \hookrightarrow H^\alpha_0(0, T; X)$.

b) Es gilt $H^{1/2}_0(0, T; X) \not\subset W^{1,1}_0(0, T; X)$.

Anleitung: a) Verwenden Sie die gleichmäßige Abschätzung für $(1+|\tau|)\,\|\hat{u}(\tau)\|_X$.
b) Betrachten Sie $X = \mathbb{R}$. Konstruieren Sie eine Funktion $u \in H_0^1(Q;\mathbb{R})$ auf dem Rechteck $Q := (0,T)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$. Nutzen Sie aus, dass für solche Funktionen $u(\cdot,0) \in H_0^{1/2}(0,T;\mathbb{R})$ gilt. Verwenden Sie für die Konstruktion von $u$ die speziellen unstetigen Funktionen $\log|\log|x||$ und nutzen Sie aus, dass Funktionen in $W_0^{1,1}(0,T;\mathbb{R})$ stetig sind.

3) Interpolationsabschätzung.

Bereiten Sie den Beweis der Interpolationsabschätzung aus Lemma 10.11 im Buch [Schweizer, PDE] für die Übung vor.

---

Abgabe am 02.12.2014.