Blatt 6 18.11.2014

Übungen zur Vorlesung

Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

1) Unterraum auch separabel.

Sei Y ein separabler Banachraum und $V \subset Y$. Zeigen Sie, dass dann auch V separabel ist. Hinweis: Verwenden Sie eine Basis $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Y und, mit $\varepsilon_j = 1/j$, die Relation

$$Y \subset \bigcap_{j\in\mathbb{N}_*} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{\varepsilon_j}(y_k)\,.$$

2) Existenz für die stationäre Navier–Stokes Gleichung.

Zeigen Sie die Existenz der endlichdimensionalen Lösungen v_K aus dem Beweis von Theorem 24.1 im Buch [Schweizer, PDE].
Hinweis: Verwenden Sie "$a(v_K^{\mathrm{neu}}, \varphi) + b(v_K^{\mathrm{alt}}, v_K^{\mathrm{neu}}, \varphi) = \langle f, \varphi\rangle$".

3) Hölderstetigkeit von $W^{1,p}(0,T;X)$-Funktionen.

Zu einem Banachraum X, zu $T > 0$ und $p \in (1,\infty)$ betrachten wir den Raum zeitabhängiger Funktionen $W^{1,p}(0,T;X)$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $\alpha > 0$ gibt, so dass jede Funktion $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ einen Repräsentanten $u \in C^\alpha([0,T],X)$ hat.
Anleitung: Wählen Sie als Repräsentanten von u die stetige Funktion mit $u(t) = \mathrm{spur}_t(u)$ für alle $t \in [0,T]$. Nutzen Sie aus, dass

$$u(t_2) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \partial_t u(s)\, ds \quad \text{für alle } 0 \le t_1 < t_2 \le T$$

gilt und verwenden Sie den Hauptsatz.

Abgabe am 25.11.2014.