Übungen zur Vorlesung

Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

1) Die Stokes Gleichung als Sattelpunktproblem.

Wir betrachten für $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $p \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ den Ausdruck

$$\Psi(v,p) := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - p\ \nabla \cdot v \right\} . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass das Sattelpunktproblem $\inf_v \sup_p \Psi(v,p)$ äquivalent zur Minimierungsaufgabe des Stokes Problems ist. Zeigen Sie, dass jede Lösung (v,p) von $D\Psi(v,p) = 0$ eine Lösung der Stokes Gleichungen ist.

2) Gebietstransformation und Divergenzfreiheit.

Zu zwei Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ gebe es eine differenzierbare Bijektion $\Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ mit $\det D\Phi(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Ein Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^N$ sei divergenzfrei. Wir konstruieren dazu das Vektorfeld

$$\tilde{v} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^N, \qquad \tilde{v}_j(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\det D\Phi(x)}\, \partial_k \Phi_j(x)\, v_k(x)$$

mit $\tilde{x} = \Phi(x)$. Zeigen Sie, dass dann auch $\tilde{v}$ divergenzfrei ist.
Hinweis: Verwenden Sie eine Testfunktion $\varphi = \psi \circ \Phi$ und die Rechnung (mit Summationskonvention, für $\det D\Phi(x) > 0$)

$$\begin{aligned} \int_\Omega v_k(x) \partial_k \varphi(x)\, dx &= \int_\Omega v_k(x) \partial_j \psi(\Phi(x)) \partial_k \Phi_j(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \tilde{v}_j(\Phi(x))\, \partial_j \psi(\Phi(x))\ \det D\Phi(x)\ dx = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{v}_j(\tilde{x})\, \partial_j \psi(\tilde{x})\, d\tilde{x}\,. \end{aligned}$$

3) Helmholtz Zerlegung von $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Betrachten Sie auf einem glatt berandeten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ den Grundraum $Y^1 := H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und die Unterräume $W^1 := \{w \in Y^1 | \, \nabla \cdot w = 0, \, n \cdot w|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Z^1 := \{g \in Y^1 | \, \exists \psi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : g = \nabla\psi\}$. Zeigen Sie, dass W^1 und Z^1 abgeschlossen sind, orthogonal bezüglich des $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$-Skalarproduktes, und dass $Y^1 = W^1 \oplus Z^1$ gilt. Verwenden Sie für den letzten Punkt die Regularität der Lösungen von inhomogenen Neumann-Problemen.

Abgabe am 18.11.2014.