Blatt 4 04.11.2014

Übungen zur Vorlesung

Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

1) Proposition 23.2 in einer vereinfachten Situation.

Das Residuum $F \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ erfülle eine Orthogonalitätsrelation: $\int_{\mathbb{R}^3} F \cdot \varphi = 0$ für alle $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\nabla \cdot \varphi = 0$. Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $p \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ existiert mit $F = \nabla p$.
Anleitung: Zeigen Sie zunächst mit Testfunktionen $\varphi = \mathrm{rot}\ \Psi$, dass $\mathrm{rot}\ F = 0$ im Distributionssinn gilt. Schließen Sie mit einem Glättungsargument und der Poincaré Ungleichung (in H^1) auf die Existenz einer lokalen Druckfunktion.

2) Verschwindender Gradient.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $u \in L^2(\Omega)$. Für den distributionellen Gradienten gelte $\nabla u = 0$. Zeigen Sie mit einem Glättungsargument, dass u eine konstante Funktion ist.

3) Satz vom abgeschlossenen Bild.

Zeigen Sie für reflexive Banachräume die in der Vorlesung nicht bewiesenen Implikationen von Satz 23.4 im Buch [Schweizer, PDE].

4) Surjektivität des Gradienten und Korollar 23.9.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge mit folgender Eigenschaft für eine Konstante $C > 0$: Für jede Funktion $g \in L^2_0(\Omega, \mathbb{R})$ existiert ein Lösung $v \in H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ von

$$\nabla \cdot v = g, \qquad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \, \|g\|_{L^2(\Omega)} \, . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für jedes Ω mit dieser Eigenschaft die Poincaré Abschätzung in der negativen Sobolev-Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{H^{-1}(\Omega)} \qquad \forall u \in L^2_0(\Omega)$$

gilt. Überlegen Sie sich, dass Eigenschaft (1) auf unbeschränkten Gebieten nicht gelten kann.

Abgabe am 11.11.2014.