

Übungen zur Vorlesung Kontinuumsmechanik

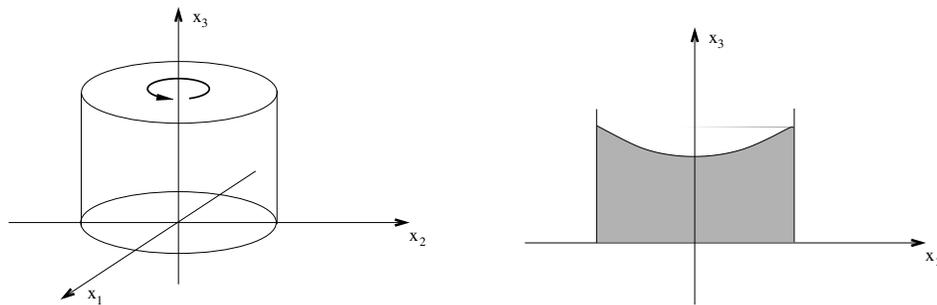
Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. A. Lamacz

1) Rotierendes Glas.

Berechnen Sie Strömungs- und Druckfeld in einem rotierenden Glas. Gesucht ist eine Lösung der dreidimensionalen Navier–Stokes (mit Gewichtskraft-Dichte $f = -g\rho e_3$) Gleichungen der Form $v(x) = \omega \times x$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $\omega = \omega_0(0, 0, 1)$, wobei $\omega_0 \in \mathbb{R}$ die Winkelgeschwindigkeit angibt. Berechnen Sie das Höhenprofil des freien Randes.



2) Biot-Savart Rekonstruktion.

Leiten Sie im Ganzraumproblem $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$ für $\text{rot } v = \omega$ die Rekonstruktionsformel

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_N(x-y) \omega(y) dy$$

ab. Dabei sind die Integralkerne K_2 (vektorewertig) und K_3 (matrixwertig) gegeben durch

$$K_2(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad K_3(x)\xi = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|^3} x \times \xi.$$

Anleitung: Verwenden Sie die Fundamentallösungen

$$\Psi(x) \sim \log |x| \quad \text{beziehungsweise} \quad \Psi(x) \sim \frac{1}{|x|},$$

um die Gleichung $\Delta \Psi = \omega$ zu lösen und differenzieren Sie einmal.

3) Skalierung von Strömungsgleichungen.

Zeigen Sie durch Einsetzen in die jeweiligen Gleichungen die in Bemerkung 22.8 im Buch [Schweizer, PDE] behaupteten Skalierungseigenschaften.

4) Zur Reynoldszahl.

Wir betrachten die Umströmung eines Autos der Länge $L = 4m$. Die Strömung (v, p) sei Lösung der stationären Navier-Stokes Gleichungen. Die Geschwindigkeit v sei von der Größenordnung $50km/h$. Berechnen Sie die Reynoldszahl (verwenden Sie den Wert $\bar{\nu} = (1/7) 10^{-4} \frac{m^2}{s}$ für Luft).

Wir nehmen an, dass ein Automodell im Maßstab $1 : 4$ vorliegt. Welche typische Geschwindigkeit muß gewählt werden, damit die Umströmung des Modells die Umströmung des Originals simuliert?

Überzeugen Sie sich, dass für diese Wahl die Reynoldszahl im Modell wie die im Original ist.

Abgabe am 28.10.2014.