Blatt 1 14.10.2014

Übungen zur Vorlesung

Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. A. Lamacz

1) Hydrostatik.

Wird die Gravitationskraft in die Strömungsgleichungen einbezogen, so muss auf der rechten Seite der Navier-Stokes Gleichungen die Volumenkraft $f = -ge_n$ addiert werden; dabei ist $g \in \mathbb{R}$ die Erdbeschleunigungskonstante und e_n der Einheitsvektor in die n-te Koordinatenrichtung. Führen Sie eine neue Druckfunktion $\tilde{p}(x,t) := p(x,t) + gx_n$ ein und schreiben Sie die Gleichungen mit Gravitationsterm mit der neuen Druckvariablen.
Überlegen Sie sich im Falle $v \equiv 0$ (Hydrostatik) für die durch $\nabla \tilde{p} = 0$ gegebenen Druckverteilungen p die grundsätzliche Funktionsweise eines Vakuumbarometers und einer hydraulischen Presse.

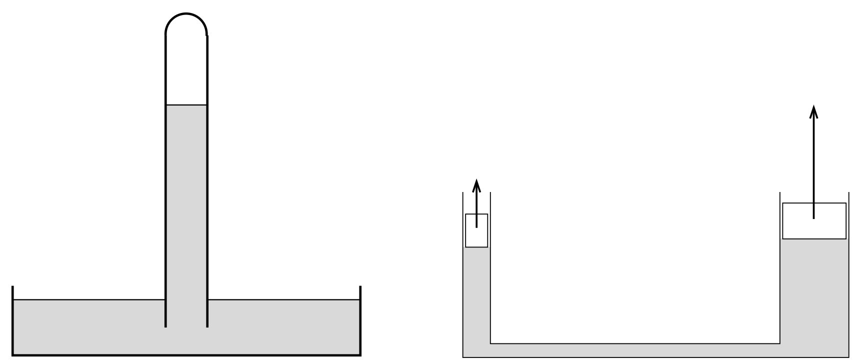

Abbildung 1: Links: Skizze zur Funktionsweise eines Barometers. Im Gefäß ist oberhalb des Fluids Vakuum. Rechts: Skizze einer hydraulischen Presse.

2) Skalierung von Strömungen im geraden Rohr.

Für $Q \subset \mathbb{R}^{N-1}$ ist ein gerades Rohr mit Querschnitt Q gegeben durch $\Omega = \mathbb{R} \times Q$. Für geeignetes $u : Q \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung der stationären Navier–Stokes Gleichungen mit Haft-Randbedingungen gegeben durch $v(x,y) = u(y)e_1$ und $p(x,y) = p(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in Q$. Geben Sie mit Hilfe einer Skalierung für beliebiges $\varepsilon > 0$

eine Lösung der stationären Navier–Stokes Gleichungen im geraden Rohr mit Querschnitt εQ an. Wie verhält sich bei konstanter Viskosität $\bar{\nu} > 0$ und konstantem Druckabfall der Gesamt-Fluss in Abhängigkeit von ε?

3) Wirbelstärkengleichung.

Leiten Sie aus den Eulergleichungen die Evolutionsgleichung für die Wirbelstärke $\omega = \nabla \times v$ in drei Dimensionen ab.

4) Punktwirbel.

Zeigen Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld $v(x_1, x_2) = -\alpha \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ eine Wirbelstärke $\omega = \tilde{\alpha}\delta_0$ hat. Verwenden Sie dabei, dass die Geschwindigkeit geschrieben werden kann als $v(x) = \nabla^\perp \Phi(x)$ mit $\Phi(x) = \log(|x|) = \frac{1}{2}\log(|x|^2)$, also mit Hilfe des Newton-Potentials.

Abgabe am 21.10.2014.