Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Wintersemester 2018/19
23.01.2019

Kontinuumsmechanik

Blatt 13

Abgabe bis zum 30.01.2019 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Existenz approx. Lösungen der stat. NSt.-Gleichungen).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$ offen und beschränkt und $f \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Betrachte einen endlichdimensionalen Unterraum V von $\{u \in H_0^1(\Omega) \; : \; \operatorname{div} u = 0\}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $v \in V$, sodass

$$\langle \nabla v, \nabla \phi \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} + b(v, v, \phi) = \langle f, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in V,$$

wobei

$$b(u, v, w) = \int_\Omega (u \cdot \nabla) v \cdot w$$

für $u, v, w \in H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$.

Hinweis: Benutzen Sie Theorem 16.4.

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit für die stationären NSt.-Gleichungen).

Zeigen Sie für eine kleine Kraft $f \in V'$ die eindeutige Lösbarkeit der stationären Navier-Stokes-Gleichungen mit einer kleinen Lösung. Verwenden Sie das skizzierte Iterationsargument mit dem Lösungsoperator $\mathcal{A}^{-1}$ für die Stokes-Gleichung.

Aufgabe 3 (Die Spur ist in $H^{1/2}(\partial\Omega)$).

Wir betrachten auf dem Rechteck $R = (0, L) \times (-1, 1)$ eine Funktion $U \in C^1(R, \mathbb{R})$ mit kompaktem Träger. Die Spur ist $u(x_1) = \operatorname{spur}(U)(x_1) = U(x_1, 0)$. Zeigen Sie eine Abschätzung

$$\|u\|_{H^{1/2}(0,L;\mathbb{R})} \leq C \|U\|_{H^1(R)}.$$

Die Ungleichung impliziert, dass der Spuroperator zu einem stetigen Operator $\operatorname{spur} : H_0^1(R) \to H_0^{1/2}(0, L; \mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann.

Anleitung: Verwenden Sie die Fourier-Transformation in der Variablen x_1 mit der dualen Variablen ξ. Schreiben Sie $|\xi||\hat{u}(\xi, x_2 = 0)|^2 = 2 \int_{-1}^0 |\xi| \hat{u}(\xi, x_2) \partial_{x_2} \hat{u}(\xi, x_2) \, \mathrm{d}x_2$, verwenden Sie Fubini und Cauchy-Schwarz.