Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Wintersemester 2018/19
16.01.2019

Kontinuumsmechanik

Blatt 12

Abgabe bis zum 23.01.2019 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Stokes in 3D: Umströmung einer Kugel).

In Dimension $n = 3$ sei $U \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, $R > 0$ ein Radius und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Faktor. Wir verwenden $r = |x|$ und betrachten

$$v = \frac{3}{4} U_i \left(\frac{R}{r} + \frac{R^3}{3r^3} \right) + \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{3} U_j x_j x_i \left(\frac{R}{r^3} - \frac{R^3}{r^5} \right), \qquad p = \alpha \sum_{j=1}^{3} U_j x_j \frac{1}{r^3}\,.$$

Bestimmen Sie einen geeigneten Faktor $\alpha \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass mit diesem Ansatz eine Lösung der Stokes Gleichungen auf dem Außenraumgebiet $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ zu den Randbedingungen $v = U$ auf $\partial B_R(0)$ und $|v| \to 0$ für $r \to \infty$ gegeben ist.

Zur Information: Mit diesem Ansatz lässt sich die Formel für die Stokes'sche Reibungskraft herleiten: Bei Umströmung einer Kugel mit Radius $R > 0$ mit einer Geschwindigkeit U bei einer Viskosität μ ist die Kraft F auf die Kugel gegeben durch $F = 6\pi\mu R|U|$.

Aufgabe 2 (Satz vom abgeschlossenen Bild).

Der Satz vom abgeschlossenen Bild behauptet für einen linearen Operator $D \in L(X, Y)$ zwischen reflexiven Banachräumen X und Y die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $R(D) \subset Y$ ist abgeschlossen.

(ii) $R(D') \subset X'$ ist abgeschlossen.

(iii) $R(D') = \ker(D)^\circ$.

In der Vorlesung wurde die Implikation (ii)$\Rightarrow$(iii) gezeigt. Beweisen Sie die übrigen Implikationen.

Aufgabe 3 (Eine Beschreibung der inf-sup Bedingung durch Kor. 23.9).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und $C > 0$. Zu jeder Funktion $g \in L^2_0(\Omega)$ existiere eine Funktion $v \in H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$, sodass

$$\nabla \cdot v = g, \qquad \|v\|_{H^1(\Omega)} \le C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Zeigen Sie, dass dann die folgende Poincaré-Abschätzung gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{H^{-1}(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in L^2_0(\Omega).$$