Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Wintersemester 2018/19
09.01.2019

Kontinuumsmechanik
Blatt 11

Abgabe bis zum 16.01.2019 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Fundamentallösung für die Stokes-Gleichung).

Sei $\chi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bi-harmonisch, also eine Lösung von $\Delta^2\chi = 0$. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ durch

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_j \left(\partial_i\partial_j\chi - \delta_{ij}\Delta\chi\right), \qquad p = \sum_{j=1}^n a_j\partial_j\Delta\chi \tag{1}$$

eine Lösung der stationären Stokes-Gleichungen gegeben ist. Die Fundamentallösung ist mit derselben Formel gegeben durch χ mit $\Delta^2\chi = \delta$.

Aufgabe 2 (Kern und Bild im Endlichdimensionalen).

Wir betrachten zwei adjungierte lineare Abbildungen im Endlichdimensionalen, $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $D = G^T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit einem Dimensionsargument, dass $\ker(D)^\circ = \ker(D)^\perp = R(G)$ gilt.

Aufgabe 3 (Verschwindender Grandient).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $u \in L^2(\Omega)$. Für den distributionellen Gradienten gelde $\nabla u = 0$. Zeigen Sie mit einem Glättungsargument, dass u eine konstante Funktion ist.

Aufgabe 4 (Proposition 23.2 in einer vereinfachten Situation).

Das Residuum $F \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ erfülle eine Orthogonalitätsrelation: $\int_{\mathbb{R}^3} F \cdot \phi = 0$ für alle $\phi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\nabla \cdot \phi = 0$. Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $p \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ existiert mit $F = \nabla p$.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst mit Testfunktionen $\phi = \mathrm{rot}\ \Psi$, *dass* $\mathrm{rot}\ F = 0$ *im Distributionssinn gilt. SchlieSSen Sie mit einem Glättungsargument und der Poincaré-Ungleichung (in* H^1*) auf die Existenz einer lokalen Druckfunktion.*