

Kontinuumsmechanik

Blatt 10

Abgabe bis zum 09.01.2019 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Biot-Savart Rekonstruktion).

Leiten Sie im Ganzraumproblem für $\operatorname{curl} v = \omega$ die Rekonstruktionsformel aus (22.21) ab.

Anleitung: Verwenden Sie die Fundamentallösungen

$$\Psi(x) \sim \log|x| \quad \text{beziehungsweise} \quad \Psi(x) \sim \frac{1}{|x|},$$

um die Gleichung $\Delta\psi = \omega$ zu lösen und differenzieren Sie einmal.

Aufgabe 2 (Rekonstruktion im Quader).

Entwickeln Sie für einen Quader $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3)$ eine Rekonstruktionsmethode. Gesucht ist für eine divergenzfreie Wirbelstärke $\omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Geschwindigkeitsfeld $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} v = \omega$. Verwenden Sie wieder den Ansatz $v = \operatorname{rot} \Psi$ mit $\Delta\Psi = \omega$. Aufgrund von $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \Psi = -\Delta\Psi + \nabla \operatorname{div} \Psi$, wollen wir Ψ so wählen, dass $\operatorname{div} \Psi = 0$ gilt. Wählen Sie dazu die Randbedingungen geeignet.

Aufgabe 3 (Die Stokes Gleichung als Sattelpunktproblem).

Wir betrachten für $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $p \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ und $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ den Ausdruck

$$\Psi(v, p) := \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - p \nabla \cdot v - f \cdot v \right\}. \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass das Sattelpunktproblem $\inf_v \sup_p \Psi(v, p)$ äquivalent zur Minimierungsaufgabe des Stokes Problems ist. Zeigen Sie, dass jede Lösung (v, p) von $D\Psi(v, p) = 0$ eine Lösung der Stokes Gleichungen ist.