Prof. Dr. B. Schweizer — Wintersemester 2018/19
Klaas Poelstra — 5.12.2018

Kontinuumsmechanik

Blatt 8

Abgabe bis zum 12.12.2018 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Wertebereich der schwachen Grenzfunktion).

Für ein Gebiet $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$, eine Zielmenge $\mathbb{R}^M$ und eine Folge $\delta \to 0$ sei $u_\delta : \Sigma \to \mathbb{R}^M$ eine schwach konvergente Folge von Funktionen, $u_\delta \rightharpoonup u$ in $L^2(\Sigma)$. Für eine Folge von Potentialfunktionen $0 \leq \Psi_\delta : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ und eine abgeschlossene konvexe Menge $0 \in K \subset \mathbb{R}^M$ gelte $\Psi_\delta(v) \geq \delta^{-1}$ für alle $v \notin K$. Zeigen Sie, dass eine δ-unabhängige Abschätzung

$$\int_\Sigma \Psi_\delta(u_\delta) \leq C_0$$

impliziert, dass $u(x) \in K$ gilt für fast alle $x \in \Sigma$.

Anleitung: Betrachten Sie die Menge gutartiger Punkte $G_\delta := \{x \in \Sigma | u_\delta(x) \in K\}$ und die charakteristischen Funktionen $\chi_\delta := \chi_{G_\delta}$ und weisen Sie

$$\int_\Sigma |\chi_\delta(x) - 1|^2 \, dx \to 0$$

nach. Schließen Sie aus dieser starken Konvergenz $\chi_\delta \to \chi_\Sigma$ für das Produkt die schwache Konvergenz $u_\delta \chi_\delta \rightharpoonup u$ in $L^1(\Sigma)$. Folgern Sie aus $u_\delta(x)\chi_\delta(x) \in K$ für alle $x \in \Sigma$, dass $u(x) \in K$ für fast alle $x \in \Sigma$.

Aufgabe 2 (Hydrostatik).

Wird die Gravitationskraft in die Strömungsgleichungen einbezogen, so muss auf der rechten Seite der Gleichungen (22.1), (22.2) beziehungsweise (22.3) in [Buch] die Volumenkraft $f = -g e_n$ addiert werden; dabei ist $g \in \mathbb{R}$ die Erdbeschleunigungskonstante und e_n der Einheitsvektor in die n-te Koordinatenrichtung. Führen Sie eine neue Druckfunktion $\tilde{p}(x,t) := p(x,t) + g x_n$ ein und schreiben Sie die Gleichungen mit Gravitationsterm mit der neuen Druckvariablen.

Überlegen Sie sich im Falle $v \equiv 0$ (Hydrostatik) für die durch $\nabla \tilde{p} = 0$ gegebenen Druckverteilungen p die grundsätzliche Funktionsweise eines Vakuumbarometers und einer hydraulischen Presse. Siehe Abbildung 1.

(Bitte wenden)

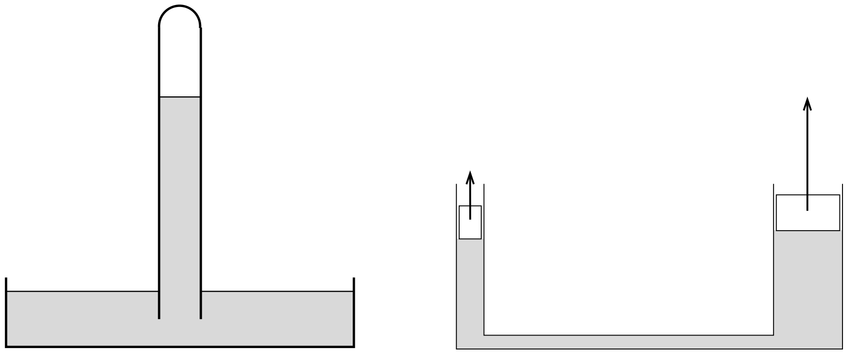

Abbildung 1: Links: Skizze zur Funktionsweise eines Barometers. Im Gefäß ist oberhalb des Fluids Vakuum. Rechts: Skizze einer hydraulischen Presse.

Aufgabe 3 (Rotierendes Glas).

Gesucht ist eine Lösung der dreidimensionalen Navier–Stokes-Gleichungen mit Gewichtskraft $f = -g\rho e_3$. Wir modellieren ein rotierendes Glas, als Randbedingung geben wir uns daher eine starre Rotation vor.

Anleitung: Wählen Sie den Ansatz $v(x) = \omega \times x$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $\omega = \omega_0(0, 0, 1)$, wobei $\omega_0 \in \mathbb{R}$ die Winkelgeschwindigkeit ist. Berechnen Sie die Druckverteilung und das Höhenprofil des freien Randes, siehe Abbildung 2.

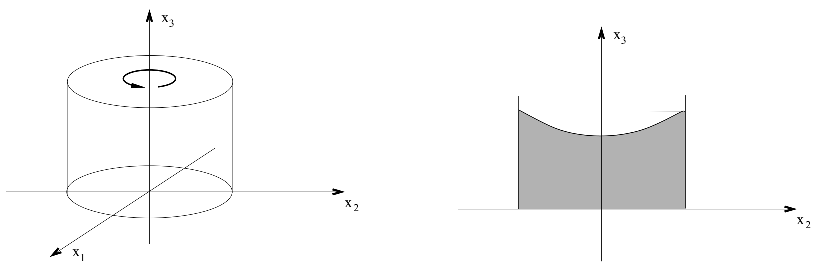

Abbildung 2: Rotierendes Glas.