Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Wintersemester 2018/19
28.11.2018

Kontinuumsmechanik

Blatt 7

Abgabe bis zum 5.12.2018 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Relationen der von-Mises Plastizität).

Für ein $\gamma > 0$ sei $K_D = \{\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dev} \mid |\sigma| \leq \gamma\}$ und $K = K_D + \mathbb{R}\,\mathrm{id} \subset \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$. Wir betrachten die Indikatorfunktion und die Supportfunktion von K,

$$\mathrm{Ind}_K : \mathbb{R}^{n\times n}_{sym} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \qquad \mathrm{Ind}_K(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \sigma \in K \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathrm{Spt}_K : \mathbb{R}^{n\times n}_{sym} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \qquad \mathrm{Spt}_K(\epsilon) = \sup\{\epsilon : \sigma \mid \sigma \in K\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Indikator- und Supportfunktion sind zueinander Fenchel-konjugiert,

$$(\mathrm{Ind}_K)^* = \mathrm{Spt}_K, \quad (\mathrm{Spt}_K)^* = \mathrm{Ind}_K\,.$$

(ii) Für $\sigma = \sigma_{dev} + \lambda\,\mathrm{id} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ mit $\sigma_{dev} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dev}$ gilt

$$\partial\,\mathrm{Ind}_K(\sigma) = \begin{cases} \{0\} & \text{falls } |\sigma_{dev}| < \gamma \\ \{\mu\sigma_{dev} \mid \mu \geq 0\} & \text{falls } |\sigma_{dev}| = \gamma \\ \emptyset & \text{falls } |\sigma_{dev}| > \gamma. \end{cases}$$

(iii) Für $\epsilon = \epsilon_{dev} + \lambda\,\mathrm{id} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ mit $\epsilon_{dev} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dev}$ gilt

$$\mathrm{Spt}_K(\epsilon) = \begin{cases} \gamma|\epsilon_{dev}| & \text{falls } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\partial\,\mathrm{Spt}_K(\epsilon) = \begin{cases} K & \text{falls } \epsilon = 0 \\ \{\gamma\epsilon_{dev}/|\epsilon_{dev}| + \mu\,\mathrm{id} \mid \mu \in \mathbb{R}\} & \text{falls } \lambda = 0, \epsilon_{dev} \neq 0 \\ \emptyset & \text{falls } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

(Bitte wenden)

Aufgabe 2 (Plastität mit zeitabhängiger Randbedingung).

Stellen Sie eine Energiegleichung analog zu (27.28) im Buch auf in dem Fall, dass die Randwerte $U_0(x,t)$ auch vom Zeitparameter t abhängen. Leiten Sie unter geeigneten Regularitätsannahmen an U_0 eine zugehörige a priori Abschätzung her.

Aufgabe 3 (Hystereserelation im Modell mit Härtung).

Betrachten Sie die zweidimensionale homogene Scherung in einem Modell mit Härtung, $B = b\,\mathrm{id}$. Modifizieren Sie das Fließgesetz (27.17) im Buch und skizzieren Sie, analog zu Abbildung 27.1 im Buch, die entsprechende Deformation-Kraft Kurve.

Aufgabe 4 (Strikt konvexe Funktionale und Abschätzungen).

Sei X ein Banachraum, $R : X \to \mathbb{R}$ ein konvexes Funktional und $q : X \times X \to \mathbb{R}$ eine koerzive, symmetrische Bilinearform mit Koerzivitätskonstante $\alpha > 0$. Wir definieren Funktionale $Q, I : X \to \mathbb{R}$ durch $Q(u) := q(u,u)$ und $I(u) := Q(u) + R(u)$.

(i) Zeigen Sie, dass I eine streng 1/2-konvexe Funktion ist, d. h.

$$I\left(\frac{u+v}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(I(u) + I(v)\right) - \frac{\alpha}{4}\|u-v\|^2$$

für alle $u, v \in X$.

(ii) Sei $u_0 \in X$ ein Minimum von I. Folgern Sie aus (i), dass

$$\frac{\alpha}{2}\|u-u_0\|^2 \le I(u) - I(u_0)$$

für alle $u \in X$.