Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Wintersemester 2018/19
21.11.2018

Kontinuumsmechanik
Blatt 6

Abgabe bis zum 28.10.2018 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Konvexität).

Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Funktion f ist konvex.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right).$$

Hinweis: Um die Aussage (ii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen, nehmen Sie zunächst an, dass f zweimal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (Konvexe Analysis).

Seien X, Y Banachräume und $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Wiederholen Sie die folgenden Begriffe aus der konvexen Analysis:

(i) *Konvexität* einer Menge $K \subset X$ und einer Funktion $F : K \to Y$ oder $\hat{\mathbb{R}}$.

(ii) *Fenchel-Konjugierte* $F^* : X' \to \hat{\mathbb{R}}$ einer Funktion $F : X \to \hat{\mathbb{R}}$.

(iii) *Subdifferential* ∂F einer konvexen Funktion $F : X \to \hat{\mathbb{R}}$.

Sei nun X reflexiv und $F : X \to \hat{\mathbb{R}}$.

(i) Zeigen Sie, dass $F^{**} \leq F$.

(ii) Beweisen Sie die *Fenchel-Relationen*: Für $u \in X$ und $u^* \in X'$ gilt

$$\begin{aligned} F(u) + F^*(u^*) = \langle u^*, u\rangle \;&\Leftrightarrow\; u^* \in \partial F(u) \\ &\Rightarrow\; u \in \partial F^*(u^*) \;\Rightarrow\; u^* \in \partial F^{**}(u). \end{aligned}$$

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Zeitschrittverfahren für eine Differentialinklusion).

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung [Buch, Gleichung (15.15), Seite 291]. Gegeben seien Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ und ein Startwert $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \in \partial\chi(Y(t_k) - u_k)$$

eine Lösung $(u_1, \ldots, u_N)$ besitzt. Überlegen Sie sich die geometrische Bedeutung des Verfahrens in dem Fall, dass χ die Indikatorfunktion einer konvexen Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Anleitung: Betrachten Sie zu einem vorgegebenem Wert u_{k-1} das Funktional

$$A \colon \mathbb{R}^n \to \hat{\mathbb{R}}, \quad A(u) \coloneqq \frac{1}{2(t_k - t_{k-1})} \|u - u_{k-1}\|^2 + \chi(Y(t_k) - u)\,.$$

Stellen Sie fest, dass A ein Minimum $u = u_k \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Schließen Sie aus $0 \in \partial A(u_k)$ die Lösungseigenschaft.