Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Wintersemester 2018/19
14.11.2018

Kontinuumsmechanik

Blatt 5

Abgabe bis zum 21.10.2018 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Instabilität eines Stabes unter Belastung).

Linearisieren Sie die Gleichung

$$\partial_x(A\,\partial_x\theta(x)) + F\sin(\theta(x)) = 0$$

für Eulers Elastica mit $x \in (0, L)$ und Randwerten $\partial_x\theta(0) = \partial_x\theta(L) = 0$ um die triviale Lösung $\theta \equiv 0$. Berechnen Sie einen kritischen Wert für die Kraft, $F_* = F_*(A, L)$, so dass Folgendes gilt:

1. Für Kräfte $0 < F < F_*$ hat die linearisierte Gleichung nur eine Lösung, nämlich die triviale Lösung.
2. Für die Kraft $F = F_*$ hat die linearisierte Gleichung unendlich viele Lösungen.

Zur Information: Bei Ausübung einer Kraft $F > F_*$ ist die Ruhelösung $\theta \equiv 0$ für den Stab nicht mehr stabil, ein realer Stab nimmt anstelle der geraden Form (unter Kompression) lieber eine gekrümmte Form ein. Auch die Lösung der nichtlinearen Gleichung ist für $F \geq F_*$ nicht mehr eindeutig, allerdings sorgt die Nichtlinearität dafür, dass für jedes F nur endlich viele Lösungen existieren.

Aufgabe 2 (Scherung in der Cauchy-Theorie).

Wir betrachten die Cauchy-Theorie aus Proposition (26.1) in [Buch] im dreidimensionalen Raum, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist eine *Scherung* gegeben durch

$$\Phi(x) = x + \varepsilon x_2 e_1 \quad \text{mit} \quad \nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den linken Cauchy-Green Spannungstensor und seine Eigenwerte. Geben Sie das entsprechend konkretisierte Materialgesetz (26.18) aus [Buch] an.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Scherung in der Piola-Kirchhoff Theorie).

Stellen Sie für die Scherung aus Aufgabe 2 den Piola-Kirchhoff Spannungstensor S auf.

Aufgabe 4 (Testfunktionen in der Definition der Quasikonvexität).

Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle für alle offenen und beschränkten Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jede Matrix $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und jede Funktion $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ die Ungleichung

$$f(\xi) \leq \fint_\Omega f\Big(\xi + \nabla\varphi(x)\Big)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Weiterhin gäbe es ein $p \in (1, \infty)$ und eine Konstante $C > 0$, so dass f der Wachstumsbedingung $0 \leq f(\xi) \leq C(1 + |\xi|^p)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genüge. Zeigen Sie, dass (1) dann auch für alle $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ erfüllt ist. In welchem Beweisschritt verwenden Sie die Beschränktheit der Mengen Ω?

Hinweis: Verwenden Sie die Dichtheit glatter Funktionen in $W_0^{1,p}(\Omega)$ und den starken Lebesgueschen Konvergenzsatz.