PROF. DR. B. SCHWEIZER
KLAAS POELSTRA

WINTERSEMESTER 2018/19
7.11.2018

Kontinuumsmechanik

Blatt 4

Abgabe bis zum 14.10.2018 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Flächenintegrale im Dreidimensionalen).
Im Dreidimensionalen kann das Flächenmaß durch das Kreuzprodukt zweier natürlicher Tangentialvektoren (gegeben durch die Parametrisierung der Randfläche) erhalten werden. Zeigen Sie, dass

$$\nu(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2(x) = (\tau_1 \times \tau_2)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^2(p),$$

wenn Φ eine Parametrisierung der Fläche ist, $x = \Phi(p)$, und $\tau_j(x) = \partial_j \Phi(p)$.
Hinweis: Zeigen Sie dazu für eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit Spalten $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^3$, dass

$$\det(F^T F) = |f_1 \times f_2|.$$

Aufgabe 2 (Kreuzprodukt nach einer Transformation).
Zeigen Sie für $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Regel

$$(Fa) \times (Fb) = \det(F)(F^{-1})^T (a \times b).$$

Aufgabe 3 (Schwingungsgleichung für Saiten).
In der Vorlesung wurde ein Modell für die statische Beschreibung einer Saite hergeleitet. Dieselbe Herleitung liefert auch in zeitabhängigen Problemen eine Evolutionsgleichung für die Positionsvariable $\Phi\colon [0, L] \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$, $(x, t) \mapsto \Phi(x, t)$. Hierbei seien $T, L > 0$. Bezeichnen wir die Massendichte der Saite im Punkt x mit $\rho(x)$, so ergibt sich die Schwingungsgleichung

$$\rho(x)\partial_t^2 \Phi(x, t) = \partial_x \left(\tilde{\sigma}(\|\partial_x \Phi(x, t)\| \frac{\partial_x \Phi(x, t)}{\|\partial_x \Phi(x, t)\|} \right) + f(x, t) \tag{1}$$

für alle $(x, t) \in (0, L) \times (0, T)$
Auch die Saite eines Instruments ist eine Saite in unserem Sinne. Überzeugen Sie sich, dass, bei konstanter Dichte ρ_0 und ohne äußere Kraft f, die Linearisierung der Gleichung (1) die Wellengleichung $\rho_0 \partial_t^2 u = \sigma_0 \partial_x^2 u$ ergibt. Geben Sie die Frequenzen einer schwingenden Saite der Länge L in Abhängigkeit von σ_0, ρ_0 und L an.

(Bitte wenden)

Aufgabe 4 (Die Kettengleichung).

i) Wir betrachten $n = 2$ und eine Gewichtskraft $f(x) = -\rho e_2$ mit $\rho \in \mathbb{R}$. Für die Lösung $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ der Gleichung

$$-\partial_x\Big(s(x)\partial_x\Phi(x)\Big) = f(x)\,, \qquad \|\partial_x\Phi(x)\| = 1\,. \tag{2}$$

nehmen wir an, dass sie als Graph geschrieben werden kann, dass also eine Abbildung $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\Phi_2(x) = Y(\Phi_1(x))$ für alle $x \in I$ gilt. Leiten Sie für Y die Kettengleichung

$$\partial_\xi^2 Y(\xi) = k\rho\sqrt{1 + |\partial_\xi Y(\xi)|^2} \tag{3}$$

her, wobei $k \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante ist, die aus den Randwerten bestimmt werden muss.
Anleitung: Eliminieren Sie $\partial_x\Phi_2$ mit Hilfe der Gleichung $\Phi_2(x) = Y(\Phi_1(x))$, dann $\partial_x\Phi_1$ unter Verwendung von $\|\partial_x\Phi(x)\| = 1$. Mit der ersten Komponente der ersten Gleichung in (2) eliminieren Sie s bis auf eine Integrationskonstante k. Die zweite Komponente der Gleichung liefert (3).

ii) Überzeugen Sie sich, dass cosh explizite Lösungen der Kettengleichung (3) liefert. Lösen Sie das Randwertproblem $Y(a) = y_l$ und $Y(b) = y_r$ für vorgegebene Daten $a, b, y_l, y_r \in \mathbb{R}$.