Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Wintersemester 2018/19
1.11.2018

Kontinuumsmechanik

Blatt 3

Abgabe bis zum 7.10.2018 beim Übungsleiter

Aufgabe 1.

Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Lipschitzgebiet. Der Rand $\partial\Omega$ sei disjunkt zerlegt in einen Dirichletrand Γ_D mit $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_D) > 0$ und einen Neumannrand Γ_N. Der Elastizitätstensor $\mathbb{A}\colon \mathbb{R}^{n\times n}_s \to \mathbb{R}^{n\times n}_s$ sei symmetrisch und koerziv, d.h. es existiere eine Konstante $\gamma > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\mathbb{A}\xi : \xi \geq \gamma \|\xi\|^2$. Weiterhin seien eine Volumenkraft $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega,\mathbb{R}^n))$ sowie Anfangsdaten $u_0 \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ gegeben. Es gelte die Kompatibilität $u_0 = 0$ auf Γ_D. Beweisen Sie eine a priori Abschätzung für eine klassische Lösung u der instationären Elastizitätsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \nabla\cdot\sigma &= f && \text{in } \Omega\times(0,T)\,,\\ \sigma &= \mathbb{A}\nabla^s u && \text{in } \Omega\times(0,T)\,, \end{aligned}$$

mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D\times[0,T]\,,\\ \nu\cdot\sigma &= 0 && \text{auf } \Gamma_N\times[0,T]\,, \end{aligned}$$

und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(\cdot,0) &= u_0 && \text{in } \Omega\,,\\ \partial_t u(\cdot,0) &= u_1 && \text{in } \Omega\,. \end{aligned}$$

Anleitung: Testen Sie die Gleichung mit $\partial_t u$ und stellen Sie eine Gleichung für die Energie $E = E_{pot} + E_{kin}$ auf, $E_{kin} := \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_t u|^2$ und $E_{pot} := \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla^s u : \mathbb{A}\nabla^s u$. Schätzen Sie die Energie $E\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ mit Hilfe des Lemmas von Gronwall auf $[0,T]$ ab. Folgern Sie die Beschränktheit der Lösung u in $L^\infty(0,T; H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)) \cap W^{1\infty}(0,T; L^2(\Omega,\mathbb{R}^n))$. Die Schranke soll dabei nur von f, Ω, T, Γ_D, u_0 und u_1 abhängen.

Aufgabe 2.

Skizzieren sie mithilfe der Galerkin-Methode einen Existenzbeweis zum Problem aus Aufgabe 1.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3.

Sei $L > 0$ und $I \coloneqq [-L, 0]$. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, so dass für jede Funktion $g \in C^1(I)$ mit $g(-L) = 0$ gilt:

$$\int_{-L}^{0} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_{-L}^{0} |x|^2 |g'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz der Differentialrechnung und Fubini.

Aufgabe 4.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $\Omega_0 \Subset \Omega$ offen und nichtleer, sowie $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ mit $\theta(x) \geq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ für $x \in \Omega_0$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq C \left(\int_{\Omega} \theta^2 |\nabla u|^2 + \int_{\Omega_0} |u|^2 \right).$$

für alle $u \in L^2(\Omega) \cap H^1_{loc}(\Omega)$.
Hinweis: Verwenden Sie (die Methode aus) Aufgabe 3.