Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Wintersemester 2018/19
17.10.2018

Kontinuumsmechanik

Blatt 2

Abgabe bis zum 24.10.2018 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Lamé-Konstanten II: reine Zugbelastung).
Wir betrachten wieder den Elastizitätstensor $\mathbb{A}\colon \mathbb{R}^{n\times n}_s \to \mathbb{R}^{n\times n}_s$ gegeben durch $e \mapsto 2\mu\, e + \lambda\, \mathrm{spur}(e)\, \mathrm{id}$. Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{A}$ invertieren lässt mit der Gleichung

$$e = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma - \frac{\lambda}{2\mu + n\lambda}\mathrm{spur}(\sigma)\ \mathrm{id}\right).$$

Für $n = 3$ und $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ ist eine *reine Zugdeformation* gegeben durch $u(x) = \varepsilon x_1 e_1 + \delta x_2 e_2 + \delta x_3 e_3$ mit

$$\nabla^s u(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}, \qquad \text{falls} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ε und δ in Abhängigkeit von λ, μ und $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die Verbindung zum Young'schen Elastizitätsmodul μ_Y her.
Bemerkung: Der Quotient $\nu := (-\delta)/\varepsilon$ heißt Poissonzahl. Er gibt das Verhältnis von lateraler Stauchung $(-\delta)$ zur Ausdehnung in Zugrichtnug ε an.

Aufgabe 2 (Energieminimierung).
Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Der Elastizitätstensor $\mathbb{A}$ sei symmetrisch. Zeigen Sie, dass sich die Lösung $u \in H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ der Elastizitätsgleichungen

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x), \qquad \sigma(x) = \mathbb{A}\nabla^s u(x)$$

charakterisieren lässt als der Minimierer der Energie

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla^s u : \mathbb{A}\nabla^s u - \int_\Omega f \cdot u\,.$$

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Isotrope Elastizitätstensoren).
Sei $\mathbb{A} : \mathbb{R}^{3\times3}_{sym} \to \mathbb{R}^{3\times3}_{sym}$ linear und und zudem isotrop in dem Sinne, dass

$$R^{-1}(\mathbb{A}e)R = \mathbb{A}(R^{-1}eR)$$

für alle $e \in \mathbb{R}^{3\times3}_{sym}$ und $R \in SO(3)$. Zeigen Sie, dass es Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mathbb{A}e = 2\mu e + \lambda\,\mathrm{spur}(e)\,\mathrm{id}$$

für alle $e \in \mathbb{R}^{3\times3}_{sym}$.

Aufgabe 4 (Druck- und Scherwellen in einem elastischen Medium).
Es sei $T > 0$. Wir betrachten die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \rho\partial_t^2 u(x,t) - \nabla\cdot\sigma(x,t) &= 0 && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T)\,, \\ \sigma(x,t) &= \mathbb{A}\nabla^s u(x,t) && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T)\,. \end{aligned}$$

Die Dichte $\rho > 0$ sei konstant und der Elastizitätstensor $\mathbb{A}$ sei wieder durch die Vorschrift $e \mapsto 2\mu\, e + \lambda\,\mathrm{spur}(e)\,\mathrm{id}$ gegeben. Das Medium sei effektiv eindimensional, d.h. alle GröSSen sollen nur von $x = x_1 \in \mathbb{R}$ abhängen (man denke zum Beispiel an Eisenbahnschienen). Zeigen Sie, dass die Wellen durch die Gleichung

$$\partial_t^2 u = c^2\partial_{x_1}^2 u \quad \text{in } \mathbb{R}\times[0,T)$$

beschrieben werden. Die Wellengeschwindigkeit c erfüllt $c^2 = (2\mu+\lambda)/\rho$ für Longitudinalwellen und $c^2 = \mu/\rho$ für Scherwellen.