Prof. Dr. B. Schweizer — Wintersemester 2018/19
Klaas Poelstra — 11.10.2018

Kontinuumsmechanik

Blatt 1

Abgabe bis zum 17.10.2018 beim Übungsleiter

Aufgabe 1 (Symmetrische und antisymmetrische Matrizen).
Es sei $n \geq 2$. Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^{n\times n}$ der reellen $n \times n$-Matrizen definieren wir das Skalarprodukt $\langle A, B\rangle \coloneqq A : B \coloneqq \sum_{k,l} A_{kl}B_{kl}$. Weiterhin seien zwei Operatoren $P_s, P_a \colon X \to X$ durch

$$P_s \colon B \mapsto \frac{1}{2}(B + B^T)$$

und

$$P_a \colon B \mapsto \frac{1}{2}(B - B^T)\,.$$

gegeben.

i) Zeigen Sie, dass P_s und P_a Projektionen sind, d. h. P_s und P_a sind linear und erfüllen $P_s^2 = P_s$ bzw. $P_a^2 = P_a$.

ii) Beweisen Sie die orthogonale Zerlegung

$$X = P_s X \overset{\perp}{\oplus} P_a X\,.$$

iii) Bestimmen Sie für $n = 2$ den Tensor 4. Stufe, $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{ij}^{kl})_{ij}^{kl}$, der die Projektion P_s beschreibt.

Aufgabe 2 (Differentialoperator der Elastizität).
Sei $\mathbb{A} \colon \mathbb{R}_s^{n\times n} \to \mathbb{R}_s^{n\times n}$ der Elastizitätstensor $e \mapsto 2\mu e + \lambda\,\mathrm{spur}(e)\,\mathrm{id}$. Zeigen Sie, dass sich das lineare Modell der Elastizitätstheorie,

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x)\,, \quad \sigma(x) = \mathbb{A}\nabla^s u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega\,,$$

schreiben lässt als

$$-\mu\Delta u - (\mu + \lambda)\nabla(\nabla \cdot u) = f \quad \text{in } \Omega\,.$$

Folgern Sie für $f = 0$ und glatte Lösungen u, dass $\nabla \cdot u$ und (in 2 und 3 Dimensionen)[1] $\mathrm{curl}\, u$ harmonisch sind. Schließen Sie daraus, dass u biharmonisch ist, $\Delta\Delta u = 0$.

[1] In 2 Raumdimensionen ist der curl-Operator durch die Vorschrift $\mathrm{curl} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u_1, u_2) \mapsto -\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2$ gegeben.

Aufgabe 3 (Rekonstruktion zweiter Ableitungen).
Sei $n \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Weiterhin sei $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie folgende Relation für den symmetrischen Gradienten $e \coloneqq \nabla^s u$ und seine Ableitungen,

$$\partial_j \partial_k u_i = \partial_j e_{ik} + \partial_k e_{ij} - \partial_i e_{jk} \quad \text{für alle } i, j, k \in \{1, \dots, n\}\,.$$

Aufgabe 4 (Lamé-Konstanten I: Scherung und Kompression).
Wir betrachten die Elastizitätsgleichungen

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x)\,, \quad \sigma(x) = \mathbb{A}\nabla^s u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega\,,$$

im dreidimensionalen Raum, wobei $\mathbb{A} \colon \mathbb{R}^{3\times 3}_s \to \mathbb{R}^{3\times 3}_s$ durch die Vorschrift $\mathbb{A}e = 2\mu e + \lambda \operatorname{spur}(e) \operatorname{id}$ gegeben ist. Die Lamé-Konstanten μ und λ seien beliebig vorgegeben.
Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist eine Scherung gegeben durch

$$u(x) = \varepsilon x_2 e_1 \quad \text{mit} \quad \nabla^s u(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

und eine gleichmäßige Kompression/Expansion ist gegeben durch

$$u(x) = \varepsilon x \quad \text{mit} \quad \nabla^s u(x) = \varepsilon \operatorname{id}\,.$$

Zeigen Sie, dass Scherung und Kompression Lösungen der Elastizitätsgleichungen sind und bestimmen Sie den Spannungstensor σ.