Blatt 9 14.6.19

Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Winkelgebiete

Sei $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass es eine nichttriviale Funktion $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ gibt mit

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+. \tag{$*$}$$

Warum ist dies kein Widerspruch zum Maximumprinzip? Beweisen Sie weiterhin, dass $u = 0$ gilt, falls u zusätzlich beschränkt ist. Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass die symmetrisch gespiegelte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ harmonisch ist.

b) Sei $\alpha \in (0, 2\pi)$ ein Winkel und

$$S_\alpha := \{x = r(\cos\varphi, \sin\varphi) | r > 0, 0 < \varphi < \alpha\}$$

ein Sektor in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es für geeigenete α Funktionen $u \in C^2(\overline{S_\alpha}\setminus\{0\}) \cap C^0(\overline{S_\alpha})$ gibt mit

$$\Delta u = 0 \text{ in } S_\alpha, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial S_\alpha, \tag{$**$}$$
$$\lim_{x\to 0, x\in S_\alpha} |\nabla u(x)| = \infty.$$

Verwenden Sie einen Separationsansatz.

2) Ein Neumann-Problem im Halbraum

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ der Halbraum mit Rand $\partial\Omega \equiv \mathbb{R}^2$, $\rho \in C^0_c(\mathbb{R}^2)$ eine Ladungsdichte auf $\partial\Omega$. Wir betrachten

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho(y)}{|x - (y,0)|} \, d\mathcal{L}^2(y).$$

Beweisen Sie, dass u harmonisch ist und die Randbedingung

$$\lim_{x_3 \to 0} \partial_3 u(\bar{x}, x_3) = -\rho(\bar{x})$$

erfüllt. Anleitung: Interpretieren Sie die Integraldarstellung von $\partial_3 u(\bar{x}, 1/m)$ als Faltung von ρ mit einer Dirac-Folge.

3) Das Spektrum des Dirichlet-Problems auf Quadern

Für einen Vektor $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_+$ von Kantenlängen bezeichne $Q_a := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_j < a_j\}$ den zugehörigen Quader mit Eckpunkt 0. Das Spektrum des Operators $-\Delta$ auf Q_a lässt sich explizit angeben: Die Eigenfunktionen sind

$$\Psi_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k_1 x_1}{a_1}\right) \cdot \ldots \cdot \sin\left(\frac{\pi k_n x_n}{a_n}\right)$$

für $k \in \mathbb{N}^n_*$, das Spektrum $\sigma = \sigma_a \subset \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\sigma = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \,|\, \exists k \in \mathbb{N}^n_* : \ \lambda = \left(\frac{\pi k_1}{a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\pi k_n}{a_n}\right)^2 \right\}.$$

a) Das Spektrum σ_a werde geordnet durch $\sigma_a = \{\lambda_j | j \in \mathbb{N}\}$, wobei $\lambda_0(a) \leq \lambda_1(a) \leq \lambda_2(a) \leq ....$ Beweisen Sie für jedes $m \in \mathbb{N}$:

$$a \neq \tilde{a}, \ a_j \leq \tilde{a}_j \ \forall j = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \lambda_m(a) > \lambda_m(\tilde{a}).$$

b) Leiten Sie die folgende Abschätzung für die Dichte des Spektrums ab:

$$\forall \lambda \in (\lambda_0(a), \infty) : \quad 2\mathrm{dist}(\lambda, \sigma_a) \leq \left[\sqrt{\lambda} \frac{2\pi}{a_{j_0}} + \frac{\pi^2}{(a_{j_0})^2} \right]$$

wobei $a_{j_0} := \max_j a_j$ die längste Kantenlänge ist.

Folgern Sie aus b) die Grenzbeziehung $\lim_{R \to \infty} \sigma_{R \cdot a} = [0, \infty)$ in dem Sinne, dass jede Zahl $\mu \in [0, \infty)$ für $R \to \infty$ durch Eigenwerte in $\sigma_{R \cdot a}$ approximiert werden kann.

Abgabe am 21.6.19 in der Vorlesung.