Blatt 8 31.5.19

Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Newton Potential

Sei $n = 2$ und $\Phi(x) = \frac{-1}{2\pi} \log |x|$ oder $n \geq 3$ und $\Phi(x) = \frac{1}{n(n-2)|B_1(0)|}|x|^{-n+2}$ das Newton Potential. Weiterhin sei $f \in C_c^2(B_r(0))$ rotationssymmetrisch und $u := \Phi * f$.
(a) Zeigen Sie, dass u rotationssymmetrisch ist, also $u(Rx) = u(x)$ für jede Rotationsmatrix $R \in SO(n)$.
(b) Zeigen Sie, dass

$$u(x) \;=\; \Phi(x) \int_{B_r(0)} f(y)\, dy \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |x| > r.$$

2) Lösungsoperator auf $L^1(\Omega)$

Mit dem Newton-Potential Φ betrachten wir den Lösungsoperator des Poisson-Problems auf dem Ganzraum, $L : f \mapsto f * \Phi$. Zeigen Sie, dass es keine Konstante C geben kann, so dass folgende Abschätzung für alle $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|D^2(Lf)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie ein Folge von Funktion f_k mit $f_k \to \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

3) Fundamentallösung für $n = 1$

Finden Sie eine Fundamentlösung ϕ auf $\mathbb{R}$, also ϕ mit $-\Delta\phi = \delta_0$. Überprüfen Sie, ob $u = \phi * f$ für $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ eine Lösung von $-\Delta u = f$ ist.

4) Spiegelung am Kreisrand

Sei $B_1(0)$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$, $f \in C^0(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R})$. Sei außerdem $u \in C^2(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R})$ mit $\Delta u = f$ in $B_1(0)$. Wir setzen

$$w(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } r := \|x\| \leq 1 \\ -u(\frac{x}{r^2}) & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie $\Delta w = g$ auf $\mathbb{R}^2 \backslash \partial B_1(0)$ mit

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } r < 1 \\ -\frac{1}{r^4} f\left(\frac{x}{r^2}\right) & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

Zusatz: Falls $u = 0$ auf $\partial B_1(0)$, ist dann $\nabla\langle w\rangle$ darstellbar durch eine $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$-Funktion? Bemerkung: Aus dem Ergebnis kann man folgern, dass im Distributionssinn $\Delta\langle w\rangle = \langle g\rangle$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ gilt.

5) Grundlösung für Δ^p

Für $p, n \in \mathbb{N}, p \geq 1, n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei

$$\Psi(x) = \|x\|^{2p-n}(A \log \|x\| + B).$$

Bestimmen Sie reelle Konstanten A und B, so dass Ψ eine Grundlösung für Δ^p im $\mathbb{R}^n$ ist. Hinweis: Es gilt $A = 0$ falls $2p < n$ oder n ungerade, $B = 0$ falls $2p \geq n$ und n gerade.

Abgabe am 14.6.19 in der Vorlesung.