Blatt 7 24.5.19

Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Wellengleichung

Es seien $u_0, u_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass durch die d'Alembert-Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,dy$$

eine distributionelle Lösung der Wellengleichung gegeben ist.

2) Distributionell harmonische Funktionen

Wir nennen eine integrierbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in einem Gebiet Ω *distributionell harmonisch* (beziehungsweise subharmonisch), falls

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^2_c(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0$$

(beziehungsweise $\int_\Omega u\,\Delta\varphi \geq 0$). Beweisen Sie, dass eine distributionell harmonische (subharmonische) Funktion der Klasse $u \in C^2(\Omega)$ im klassischen Sinn harmonisch (subharmonisch) ist.

3) Schwarz'sches Spiegelungsprinzip

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ der Halbraum, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ distributionell harmonisch in Ω mit Randwerten $u|_{\partial\Omega} = 0$. Betrachten Sie die *ungerade* Fortsetzung $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{u}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) := \begin{cases} u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) & \text{falls } x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{falls } x_n < 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{u}$ auf $\mathbb{R}^n$ harmonisch im Distributionssinn ist.

Abgabe am 31.5.19 in der Vorlesung.