Blatt 6 17.5.19

Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Distributionelle Konvergenz

Geben Sie Beispiele an für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

a) $u^\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u^\varepsilon \to 0$ punktweise fast überall, aber für ein $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon \varphi \not\to 0\,.$$

b) $u^\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u^\varepsilon \to 0$ punktweise fast überall und $u^\varepsilon \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$; zudem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Aber für ein $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(u^\varepsilon)\varphi \not\to 0\,.$$

2) Abnehmende Größen in Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten glatte Lösungen $u^\varepsilon : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x [f(u^\varepsilon)] = \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon\,.$$

Weiterhin nehmen wir an, dass $u^\varepsilon(x,t)$ für $|x| \to \infty$ hinreichend schnell gegen 0 konvergiert (für alle $t > 0$). Zeigen Sie, dass die beiden Größen

$$M(t) := \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon \quad \text{und} \quad E(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|u^\varepsilon|^2$$

mit der Zeit nur abnehmen.

3) Distributionsableitungen

Bestimmen Sie die Distributionsableitungen der folgenden Funktionen $u : D \to \mathbb{R}$.

a) $D = (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \qquad u(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

b) $D = (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \qquad u(x) := \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$

c) $D = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \qquad u(x) = |x|.$

4) Einfache Pole

Sei $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist durch $\langle f_\alpha \rangle$ eine Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definiert?

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$ sind $\langle f_\alpha \rangle$ und $\partial_j \langle f_\alpha \rangle$ für $j = 1, \ldots, n$ durch L^p_{loc}-Funktionen darstellbar?

Abgabe am 24.5.19 in der Vorlesung.