

Übungen zur Vorlesung
Klassische Methoden der
Partiellen Differentialgleichungen
Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Schock-Lösungen

Wir betrachten Schock-Lösungen u mit den Werten u_l und u_r auf den beiden Seiten der Schocklinie; der Schock bewege sich mit der Rankine-Hugoniot-Geschwindigkeit $\lambda = [f]/[u]$. Zeigen Sie: Für glatte konvexe Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) Lax-Schock-Bedingung $f'(u_l) > \lambda > f'(u_r)$
- (ii) Charakteristikenrelation: $f'(u_l) > f'(u_r)$
- (iii) Wertrelation $u_l > u_r$

2) Grüne-Ampel-Problem

Lösen Sie die Verkehrsfluss-Erhaltungsgleichung aus Blatt 4 Aufgabe 4 für das Grüne-Ampel-Problem $u_0(x) = \rho_{jam}$ für $x < 0$ und $u_0(x) = \rho_{jam}/2$ für $x > 0$. Geben Sie die Lösung u an. Skizzieren Sie zusätzlich die Trajektorien für einzelne Fahrzeuge.

3) Oleinik-Schock-Ungleichungen

Beweisen Sie mathematisch rigoros Bemerkung 2.14 aus der Vorlesung.

4) Distributionsableitungen

Bestimmen Sie die Distributionsableitungen der folgenden Funktionen $u : D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{a) } D = (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \quad u(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } D = (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \quad u(x) := \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{c) } D = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad u(x) = |x|.$$

Abgabe am 17.5.19 in der Vorlesung.