Blatt 4 6.5.19

Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Maximumprinzip

Sei $n = 1$ und $L > 0$. Betrachten Sie für $c \in \mathbb{R}$ das elliptische Randwertproblem

$$-u_{xx} + cu = f \quad \text{in } (0, L), \qquad u(0) = u(L) = 0.$$

(a) Gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ ein Maximumprinzip, also $f \leq 0 \Rightarrow u \leq 0$?

(b) Gilt ein solches Maximumprinzip für alle $c > 0$?

2) Biharmonische Gleichung

Betrachten Sie die biharmonische Gleichung

$$-\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega \tag{$*$}$$

für $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.

(a) Sei zunächst $f = 0$. Zeigen Sie, dass kein Maximumprinzip gilt: Es gibt $u \in C^4(\bar{\Omega})$, sodass

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) > \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

(b) Betrachten Sie ($*$) mit

$$u = g_0, \quad \nabla u \cdot \nu_\Omega = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei ν_Ω die äußere Normale von Ω bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem höchstens eine Lösung $u \in C^4(\bar{\Omega})$ besitzt.

Tipp: (a) Betrachten Sie quadratische u. (b) Verwenden Sie eine Energiemethode, also Testen der Gleichung mit u.

3) Parametrisierung mit Charakteristiken

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über Umkehrfunktionen, dass die Funktion Γ aus Satz 2.4 eine differenzierbare Inverse besitzt.

4) Verkehrsfluss

Ein Modell für den Verkehrsfluss auf Autobahnen ist wie folgt: $u = u(x,t)$ sei die Dichte von Autos um den Punkt x zur Zeit t. Die Geschwindigkeit eines Autos sei maximal $c_{\max}$. Wir wollen modellieren, dass die typische Geschwindigkeit der Autos geringer ist, wenn viele Autos unterwegs sind, wir gehen hier von dem einfachen Gesetz $c(u) = c_{\max}\left(1 - \frac{u}{u_{\text{jam}}}\right)$ aus. Die Flussfunktion ist Autodichte mal Autogeschwindigkeit, also $f(u) = uc(u)$. Wir betrachten das Riemannproblem zu $\partial_t u = \partial_x[f(u)] = 0$ mit Anfangswerten u_0 von der Form $u_0(x) = u_l$ für $x \leq 0$ und $u_0(x) = u_r$ für $x > 0$.
(a) Lösen Sie für $u_r = u_{\text{jam}}$.
(b) Lösen Sie für $u_l = u_{\text{jam}}/4$ und $u_r = u_{\text{jam}}/2$.
Mit welcher Geschwindigkeit wandert jeweils das Stauende?

Abgabe am 13.5.19 in der Vorlesung.