Blatt 3 24.4.19

Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Wellengleichung

Bestimmen Sie auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ durch die Auswertung der d'Alembert-Formel die formale Lösung u zur Wellengleichung $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ mit Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \partial_t u(.,0) = 0\,.$$

Überlegen Sie, inwiefern die Anfangswerte angenommen werden.

2) Eindeutigkeit bei der Wärmeleitungsgleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand.

a) Beweisen Sie die Eindeutigkeit von Lösungen $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0,T))$ der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung, ohne das Maximumprinzip zu benutzen. Stellen Sie dafür für zwei Lösungen u_1 und u_2 die Gleichung für die Differenz $w = u_1 - u_2$ auf. Multiplizieren Sie diese Gleichung mit w, integrieren Sie partiell, und verwenden Sie die folgende *Poincaré Ungleichung* mit $C = C(\Omega) > 0$:

$$\forall u \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ mit } u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ gilt} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass für die homogene Wärmeleitungsgleichung mit Randwerten 0 die Nulllösung stabil ist: Für alle Anfangsdaten $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ konvergiert die zugehörige Lösung u gegen 0 für $t \to \infty$.

3) Maxwell-Gleichungen

Wir betrachten Vektorfelder $E, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die zweimal stetig differenzierbar sind. Differentialoperatoren werden auf Vektorfelder stets komponentenweise angewandt, also zum Beispiel

$$\Delta E = (\Delta E_1,\, \Delta E_2,\, \Delta E_3)\,.$$

a) Beweisen Sie

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} E = -\Delta E + \operatorname{grad}\operatorname{div} E.$$

b) Seien $E, B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $E = E(x,t)$, $B = B(x,t)$ zweimal stetig differenzierbare Lösungen der Maxwell-Gleichungen,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x E &= 0, \qquad & \operatorname{div}_x B &= 0\,, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \operatorname{curl}_x B, \qquad & \frac{\partial B}{\partial t} &= -\operatorname{curl}_x E\,. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass E und B Wellengleichungen erfüllen,

$$\partial_t^2 E - \Delta E = 0, \qquad \partial_t^2 B - \Delta B = 0.$$

4) Erhaltungsgleichung

Sei $u = u(x,t)$ konstant entlang aller Strahlen, die durch den Ursprung laufen: $u(ax, at)$ ist unabhängig von a. Differenzieren Sie nach a und stellen Sie so eine Erhaltungsgleichung für u auf. Lösen Sie mit Hilfe von Charakteristiken durch $\{t = 1\}$. Schließen Sie, dass u nur von der Variablen x/t abhängt.

Abgabe am 6.5.19 in der Vorlesung.