Blatt 2 17.4.19

Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Ein Maximumprinzip für subharmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

a) Sei u *strikt subharmonisch,* also $-\Delta u < 0$ in Ω. Zeigen Sie, dass u in Ω kein lokales Maximum besitzt.

b) Sei u *subharmonisch,* also $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Weisen Sie nach, dass u sein Maximum auf dem Rand annimmt, $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Hinweis zu b): Addieren Sie die Funktion $\varepsilon \exp(x_1)$ mit $\varepsilon > 0$ und verwenden Sie a).

2) Rotation eines Vektorfeldes

Die Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\operatorname{curl} V = \left(\partial_{x_2} V_3 - \partial_{x_3} V_2, \partial_{x_3} V_1 - \partial_{x_1} V_3, \partial_{x_1} V_2 - \partial_{x_2} V_1\right) .$$

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit C^1-Rand und äußerem Normalfeld ν, sowie ein Vektorfeld $F \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie die Relation

$$\int_{\partial\Omega} \operatorname{curl} F \cdot \nu \, dS = 0 \,.$$

3) Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. In Polarkoordinaten $\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ betrachtet man die Funktion $\tilde{u} := u \circ \Phi$, $\tilde{u}(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Zeigen Sie die Darstellung des Laplaceoperators

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\tilde{u}(r, \varphi) \qquad (*)$$

für $x = \Phi(r, \varphi)$ und $r > 0$.

Anleitung: Durch Normierung erhält man aus den Vektoren $\partial_r\Phi$ und $\partial_\varphi\Phi$ die (orthogonalen) Richtungsvektoren e_r und e_φ. Der Gradient von u lässt sich damit schreiben als $(\nabla u)(\Phi(r,\varphi)) = \partial_r\tilde{u}(r,\varphi)e_r + r^{-1}\partial_\varphi\tilde{u}(r,\varphi)e_\varphi$. Für eine beliebige Testfunktion $\psi \in C_c^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gilt daher

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla\psi = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \partial_r\tilde{u} \cdot \partial_r\tilde{\psi} + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi\tilde{u} \cdot \partial_\varphi\tilde{\psi} \right\} r\, d\varphi\, dr\,.$$

Durch partielle Integration erhält man links Δu und rechts den Ausdruck aus $(*)$.

4) Flächenintegrale im Dreidimensionalen

Für $n = 3$ kann das Flächenmaß durch das Kreuzprodukt zweier natürlicher Tangentialvektoren (gegeben durch die Parametrisierung der Randfläche) erhalten werden. Wir schreiben symbolisch

$$\nu(x)d\mathcal{H}^2(x) = (\tau_1 \times \tau_2)\; d\mathcal{L}^2(p)\,, \qquad (**)$$

wenn Φ eine Parametrisierung der Fläche ist, $x = \Phi(p)$, und $\tau_j(x) = \partial_j\Phi(p)$.
Zeigen Sie zum Nachweis von $(**)$ für eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit Spalten $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\det(F^T \cdot F) = |f_1 \times f_2|\,.$$

Abgabe am 24.4.19 in der Vorlesung.