Blatt 11 28.6.19

Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Die Wärmeleitungsgleichung im Halbraum

Gegeben seien Randdaten $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass auf $\Omega = (0,\infty)$ durch

$$u(x,t) = \frac{x}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{3/2}}\, e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}}\, ds$$

eine klassische Lösung u des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 &\qquad \text{in } \ \Omega \times (0,\infty)\,, \\ u = 0 &\qquad \text{auf } \ \Omega \times \{t = 0\}\,, \\ u = g &\qquad \text{auf } \ \{x = 0\} \times [0,\infty)\,. \end{aligned}$$

gegeben ist. Hinweis: Definieren Sie $v(x,t) := u(x,t) - g(t)$ und setzen Sie v ungerade auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ fort.

2) Der Klang einer Trommel

Die Auslenkung der Membran über $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei beschrieben durch

$$u : \Omega \times (0,\infty) \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}\,.$$

Bei einem Dämpfungsfaktor $b > 0$ lautet die gedämpfte Wellengleichung für u

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = -2b\,\partial_t u \qquad \text{in } \Omega \times (0,\infty)\,,$$

mit der Dirichlet-Bedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,\infty)$ und den Anfangsbedingungen $u(.,0) = u_0$ und $\partial_t u(.,0) = u_1$ auf Ω. Geben Sie formal die allgemeine Lösung mit Hilfe der Eigenfunktionen ϕ_n zum Eigenwert λ_n von $-\Delta$ an. Welche Mischung aus Frequenzen hört man nach langer Zeit?

3) Schrödinger-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung lautet, für normierte physikalische Parameter und ein Potential $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V = V(x)$,

$$i\partial_t u = \Delta u + V \cdot u \,. \tag{$*$}$$

Stellen Sie für Lösungen der Form $u(x,t) = U(x)e^{i\omega t}$ fest, dass U eine Helmholtz-artige Gleichung löst (Die Helmholtz-Gleichung lautet $-\Delta u = \omega^2 u$). Schreiben Sie in $(*)$ die Gleichungen für Realteil und Imaginärteil getrennt und stellen Sie eine Beziehung zu einer Plattengleichung

$$\partial_t^2 u = -\Delta^2 u$$

her.

Abgabe am 5.7.19 in der Vorlesung.