Übungen zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Die Raumdimension sei $n = 1$, wir suchen eine Lösung $u : \mathbb{R} \times (0, \infty)$ der Wärmeleitungsgleichung. Wir machen den Skalierungsansatz $u(x, t) = v(x^2/t)$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion u erfüllt $\partial_t u = \partial_x^2 u$ genau dann, wenn

$$4zv''(z) + (2 + z)v'(z) = 0 \quad \text{für alle } z > 0\,. \tag{$*$}$$

b) Die allgemeine Lösung von $(*)$ lautet, für $c, d \in \mathbb{R}$,

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2}\, ds + d\,.$$

c) Man erhält die eindimensionale Fundamentallösung, indem man u nach x differenziert und die Konstante c geeignet wählt.

2) Eine Gleichung mit endlichem Lösungsintervall

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $y_0 > 0$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\partial_t y = f(y), \quad y(0) = y_0 > 0$$

nur ein endliches maximales Existenzintervall hat. Ein Beispiel ist gegeben durch $f(y) = y^2$. Zeigen Sie, dass auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f(u), \quad \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0$$

mit Anfangsbedingung $u(0) = u_0 \geq 0$ und $u_0 \neq 0$ höchstens ein endliches Existenzintervall hat.
Anleitung: Stellen Sie eine Gleichung für den Mittelwert von u auf. Verwenden Sie Jensen's Ungleichung $⨍_\Omega f(u) \geq f\left(⨍_\Omega u\right)$ für jede konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nutzen Sie ein Vergleichsprinzip: für zwei Funktionen $y, w : [0, T] \to \mathbb{R}$ mit $\partial_t y = f(y)$ und $\partial_t w \geq f(w)$ und $w(0) \geq y(0)$ gilt $w \geq y$.

3) Entwicklung in eine Fourier-Reihe

Wir betrachten das folgende Anfangs-Randwertproblem auf $\Omega = (0,1)$ für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t) \qquad && \forall\ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
u(0,t) &= u(1,t) = 0 && \forall\ t \in (0,\infty),\\
u(x,0) &= u_0(x) && \forall\ x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Für das Anfangsdatum gelte $u_0 \in C^1([0,1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Geben Sie eine Darstellung der Lösung mit einer Fourier-Reihe an.
Hinweis: Die ungerade Fortsetzung von u_0 kann auf $(-1,1)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden.

Abgabe am 28.6.19 in der Vorlesung.