

Übungen zur Vorlesung
 Klassische Methoden der
 Partiellen Differentialgleichungen
 Sommersemester 2019

Prof. Dr. B. Schweizer

1) Die eindimensionale Laplacegleichung

Sei $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Geben Sie alle Lösungen zu folgenden Gleichungen an, wobei $v, w, y, z \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(a) = v, \quad u(b) = w \quad (1)$$

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(a) = v, \quad u'(b) = z \quad (2)$$

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u'(a) = y, \quad u'(b) = z \quad (3)$$

Verifizieren Sie, dass Eindeutigkeit, Maximumprinzip und Mittelwertformel gelten.

2) Zwiebelintegration

Beweisen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ die Formel

$$\int_{B_R(0)} f \, d\mathcal{L}^n = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f \, d\mathcal{H}^{n-1} \, dr. \quad (4)$$

Anleitung: Definieren Sie $T_R : x \mapsto Rx$ und damit $(f \circ T_R)(x) = f(Rx)$, um die linke Seite als Integral über $B_1(0)$ zu schreiben. Differenzieren Sie die zu vergleichenden Ausdrücke nach R . Ein Integral der Form

$$\int_{B_1(0)} (\nabla f) \circ T_R(x) \cdot x \, dx$$

wird mit partieller Integration behandelt.

Bemerkung: Die Integrationsformel (4) ist ein einfaches Beispiel für die Co-Flächen Formel (oder Co-area Formel): Die Familie $\partial B_r(0)$ von Flächen (parametrisiert mit $0 < r < R$) überstreicht die Kugel $B_R(0)$. Das Integral über die Kugel kann dann als r -Integral über die Flächenintegrale geschrieben werden.

3) Eine notwendige Bedingung für Neumann-Randwerte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^1 -Rand $\partial\Omega$ und äußerem Normalenfeld ν . Die Funktion $u \in C^2(\bar{\Omega})$ sei eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u &= \psi && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann notwendigerweise

$$\int_{\partial\Omega} \psi(x) dS(x) = - \int_{\Omega} f(x) dx.$$

4) Invarianz des Laplaceoperators

Wir betrachten zwei Koordinatensysteme, gegeben durch zwei orthonormale Basen des \mathbb{R}^n , (e_1, \dots, e_n) und (v_1, \dots, v_n) . Ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ wird geschrieben als $P = \sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n y_k v_k$, hat also den Koordinatenvektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ in der ersten Basis und den Koordinatenvektor $y = (y_1, \dots, y_n) = Sx$ in der zweiten Basis, wobei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthonormale Matrix ist. Berechnen Sie für $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ den Gradienten $\nabla u(P)$ in beiden Koordinatensystemen. Stellen Sie fest, dass $\Delta u(P)$ unabhängig vom Koordinatensystem ist.

Abgabe am 17.4.2019 in der Vorlesung.