28.09.15
Dauer: 180 Min

Zweite Prüfungsklausur zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Eigenwerte und Eigenfunktionen (12 Punkte)

a) Geben Sie auf $\Omega = (0, \pi)^n \subset \mathbb{R}^n$ alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ und zugehörigen Eigenfunktionen von $-\Delta$ an, also Lösungen $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \qquad \text{auf } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

b) Welche Eigenschaften haben alle λ?
c) Skizzieren Sie für $n = 1$ einen Beweis dafür, dass tatsächlich die Eigenfunktionen ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$ bilden.

2) Darstellungsformel (10 Punkte)

a) Geben Sie für $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ eine Darstellungsformel für u mit $-\Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n$ an.
b) Skizzieren Sie einen Beweis für eine Abschätzung der Form

$$||\nabla u||_{L^\infty} \leq C||f||_{L^\infty}.$$

3) Zwiebelintegration (8 Punkte)

Geben Sie die Formel für die Zwiebelintegration an.

4) Charakteristiken und Erhaltungsgleichungen (10 Punkte)

Zu Anfangswerten $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $u = u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times (0,T) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\partial_t u + \partial_x[f(u)] = 0. \tag{$*$}$$

Welche Eigenschaften haben Charakteristiken $\gamma_y(t)$? Skizzieren Sie, wie mit Charakteristiken Lösungen von $(*)$ konstruiert werden können.

5) Verkehrsflussmodell (10 Punkte)

Ein einfaches Verkehrsflussmodell verwendet $\partial_t u + \partial_x[f(u)] = 0$ mit $f(u) = u(1-u)$. Geben Sie für

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} \text{ für } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(Stau rechts)}$$

eine Lösung an. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Schock?

6) Maximumprinzip (12 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ sind Lösungen u von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

mit $g \in C^0_b(\mathbb{R}^{n-1})$ gegeben durch

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y) \frac{1}{|x-(y,0)|^n}\, dy. \tag{$*$}$$

a) Zeigen Sie, dass für $g \equiv 1$ die Funktion u aus $(*)$ konstant ist.
b) Folgern Sie aus $(*)$ ein starkes Maximumprinzip.

7) Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung (8 Punkte)

Rechnen Sie für die 1-dimensionale Fundamentallösung

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

nach, dass für $t > 0$ tatsächlich $(\partial_t - \Delta)\Phi = 0$ gilt.

8) Distributionen (10 Punkte)

(a) Geben Sie die wesentlichen Punkte der Definition einer Distribution auf $\mathbb{R}^n$ an.

(b) Geben Sie eine Distribution auf $\mathbb{R}$ an, die sich als glatte Funktion darstellen lässt. Was bedeutet dies?

(c) Geben Sie eine Distribution auf $\mathbb{R}$ an, die sich nicht durch ein $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ darstellen lässt.

(d) Geben Sie eine Distribution auf $\mathbb{R}$ an, die sich lokal durch eine glatte Funktion darstellen lässt, aber nicht durch ein $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(e) Geben Sie eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Distributionen auf $\mathbb{R}$ an mit $u_k \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $u_k \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, aber $||u_k||_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

9) Wellengleichung (8 Punkte)

Lösen Sie auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ die Gleichung

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x) \text{ und } \partial_t u(x,0) = u_1(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit dem Ansatz $u(x,t) = v(x-t) + w(x+t)$. Geben Sie Formeln für v und w in Abhängigkeit von u_0 und u_1 an.

10) Wellengleichung (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Funktion $u(x,t) := u_0(x-t)$ eine Lösung von

$$\partial_t u + \partial_x u = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

im Distributionssinn ist.