03.08.15
Dauer: 180 Min

Prüfungsklausur zur Vorlesung

Klassische Methoden der Partiellen Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

Prof. Dr. B. Schweizer　　Dipl. Math. Sven Badke

1) Eigenwerte und Eigenfunktionen (8 Punkte)

Auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir Lösungen u von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \qquad &&\text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad &&\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zu einer Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ (Eigenwert). Zeigen Sie

a) λ ist reell und positiv.

b) Eine Eigenfunktion $u \in C^2(\Omega)$ hat kein negatives lokales Maximum.

2) Harmonische Funktionen in Polarkoordinaten (8 Punkte)

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ seien $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$.

a) Geben Sie alle harmonischen Funktionen der Form $u(r, \varphi) = r^\alpha sin(\beta\varphi)$ an.

b) Für $m \in \mathbb{N}$ sei $u(r, \varphi) = U(r) sin(m\varphi)$ eine Eigenfunktion von $-\Delta$, also

$$-\Delta u = \lambda u.$$

Stellen Sie eine Gleichung für U auf (Besselsche DGL).

3) Satz von Liouville (12 Punkte)

Im Wesentlichen gilt: Beschränkte harmonische Funktionen sind konstant.

a) Formulieren Sie die präzise Aussage.

b) Geben Sie ein unbeschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ an und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt und harmonisch mit $u \not\equiv const$.

c) Skizzieren Sie einen Beweis für folgende Aussage. Es existiert ein $C > 0$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ und alle $u : B_R(x) \to \mathbb{R}$ harmonisch gilt

$$|\nabla u(x)| \leq C \frac{1}{R} \fint_{B_R(x)} |u|.$$

4) Gleichmäßige Konvergenz von Lösungen (10 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, seien u_k Lösungen von $-\Delta u_k = f_k$ auf Ω (mit Dirichlet-Randbedingung). Begründen Sie, dass für $f_k \to f$ gleichmäßig in Ω die Lösungen u_k gleichmäßig gegen die Lösung u von $-\Delta u = f$ auf Ω (mit Dirichlet-Randbedingung) konvergieren. Skizzieren Sie einen Beweis mit der Green'schen Funktion $G = G(x, y)$.

5) Burgers-Gleichung (14 Punkte)

Wir betrachten die Burgers-Gleichung

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x(u^2) = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

a) Geben Sie explizit eine Lösung an, die nur zwei Werte annimmt. Was besagt die Rankine-Hugoniot-Bedingung? Was ist im Beispiel die Schockgeschwindigkeit?

b) Geben Sie explizit eine Lösung mit Verdünnungswelle an. Welche Lösung (aus a) oder b)) ist physikalisch sinnvoll? Begründen Sie ihre Wahl.

6) Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung (8 Punkte)

Geben Sie qualitativ (Konstanten sind nicht wichtig) die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung an. Nennen Sie drei fundamentale Eigenschaften.

7) Ausbreitungsgeschwindigkeit (16 Punkte)

a) „Die Wellengleichung in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3$ hat eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.“ Formulieren und begründen Sie eine präzise Aussage.

b) „Die Wärmeleitungsgleichung hat eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.“ Formulieren Sie eine Aussage und begründen Sie mit einem Maximumprinzip.

8) Die gedämpfte Plattengleichung (14 Punkte)

Die gedämpfte Plattengleichung lautet (eingespannt und gelagert)

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u + \Delta^2 u = b\Delta u \qquad & \text{auf } \Omega, \\ u = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega, \\ \Delta u = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Finden Sie für Quader Ω explizite Lösungen.

9) Distributionen (10 Punkte)

Für Distributionen $u_k, f_k, u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gelte $-\Delta u_k = f_k$ und $-\Delta u = f$ in $\mathcal{D}'$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Aus $u_k \to u$ in $\mathcal{D}'$ für $k \to \infty$ folgt $f_k \to f$ in $\mathcal{D}'$ für $k \to \infty$.

b) Aus $f_k \to f$ in $\mathcal{D}'$ für $k \to \infty$ folgt $u_k \to u$ in $\mathcal{D}'$ für $k \to \infty$.