Klass. PDG,
Klausur 1
3.8.2015

1a) $\int_\Omega -\Delta u \cdot \bar{u} = \lambda \int u \bar{u}$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \lambda \int |u|^2$$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ & $\lambda > 0$

b) Ann.: $x_0 \in \Omega$ lok. Max. von u mit $u(x_0) < 0$

lok. Max. $\Rightarrow -\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 u(x_0) \geq 0 \Rightarrow -\Delta u(x_0) \geq 0$

$$= +\lambda u(x_0) < 0 \quad ↯$$

2 a) $\Delta = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2$

$0 = \Delta u = \alpha^2 r^{\alpha-2}\sin\beta\varphi - \beta^2 r^{\alpha-2}\sin\beta\varphi \quad \forall r,\varphi$

$\Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \pm\beta$

b) $-\Delta u = -\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)\, U(r)\sin m\varphi - \frac{1}{r^2}m^2\, U(r)\sin m\varphi$

$= \lambda u = \lambda U(r)\sin m\varphi$

Gl. für U: $\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)U(r) = \left(\lambda + \frac{1}{r^2}m^2\right)U(r)$

3 a) $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch & beschr. $\Rightarrow u = \text{const.}$

b) $u: \mathbb{R}^n \setminus B_1(0) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|^{n-2}}$

3c) $R = 1$, $\psi : B_1(0) \to \mathbb{R}$ sei C_0^∞ mit $\int \psi = 1$

und $\psi(x) = \Psi_0(|x|)$

MW-Formel $\Rightarrow$ $$u(0) = \int_{B_1(0)} \psi \cdot u \leq \underbrace{\sup|\psi|}_{=: C_1} \cdot \int_{B_1} |u|$$

Also Aussage für $R = 1$ und $x = 0$ mit $C = C_1 \cdot |B_1(0)|$

$R > 0$ beliebig durch Skalierung: $\tilde{u}(x) := u(\frac{Rx}{\cancel{R}})$

$\tilde{u} : B_1(0) \to \mathbb{R}$ harm.

$\nabla u(0) = \frac{1}{R} \cdot \nabla \tilde{u}(0)$

$$|\nabla \tilde{u}(0)| \leq C_1 \int_{B_1(0)} |\tilde{u}| \overset{\text{Trafo}}{=} C_1 \int_{B_R(0)} |u(x)| \frac{1}{R^n}\, dx$$

$$\Rightarrow |\nabla u(0)| \leq \frac{C_1 \cancel{R}}{R \cdot R^n} \int_{B_R(0)} |u| = \frac{1}{R} C \fint_{B_R} |u|$$

Also Aussage für $R > 0$ bel.

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bel.: $\hat{u}(x) := u(x_0 + x)$.

4) $-\Delta u_k = f_k, \quad u_k = 0$ auf $\partial\Omega$

$-\Delta u = f, \quad u = 0$ auf $\partial\Omega$

$$\Rightarrow u_k(x) = -\int_\Omega G(x,y) f_k(y)\,dy, \quad u(x) = -\int_\Omega G(x,y) f(y)\,dy$$

$$\Rightarrow |u_k(x) - u(x)| \le \|f_k - f\|_\infty \underbrace{\int_\Omega G(x,y)\,dy}_{\in C^0(\overline{\Omega})} \le C \cdot \|f_k - f\|_\infty$$

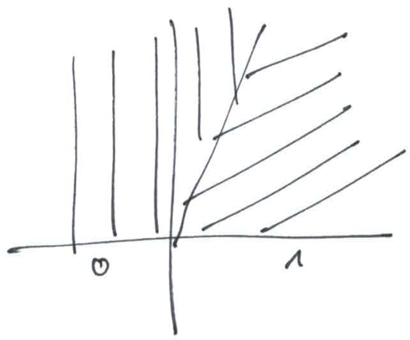
$(-\Delta)^{-1} : f \mapsto u, \qquad u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\,dy$

Max.-~~Pr~~. $\Rightarrow (f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0) \Rightarrow G \geq 0$

Max.-Pr. $\Rightarrow |u|(x) \le C \|f\|_\infty \Rightarrow C \geq \int G(x,y)\,dy$

$f(y) := 1$

5 a)



$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2}t \\ 1 & x \geq \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Rank.-Hug. $\Rightarrow \gamma' = \dfrac{[f]}{[u]}$

$f(u) = \frac{1}{2}u^2 \Rightarrow [f] = +\frac{1}{2}$

$[u] = 1$

$\Rightarrow \gamma' = \frac{1}{2}$

Geschw. des Schocks

b)

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/t & x \in [0,t] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Lsg aus b) ist physikal. sinnvoll, denn bei a) laufen die Charakteristiken aus dem Schock heraus

(Lax-Bed. nicht erfüllt)

6) $\Phi(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}^n} e^{-\frac{|x|^2}{t}}$

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx = 1 \quad \forall t > 0$

(ii) $\langle \Phi(\cdot,t) \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$ für $t \searrow 0$

(iii) $(\partial_t - \Delta)\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

7) a) Seien $u_0, u_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Anfangswerte

mit $\left.\begin{array}{l} u_0 = \tilde{u}_0 \\ u_1 = \tilde{u}_1 \end{array}\right\}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$

Dann gilt für die Lsg. u & $\tilde{u}$ von $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ zu diesen AW'en:

$$u = \tilde{u} \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus B_{R+1}(0) \ \forall t \in [0,1]$$

Beweis: 1D & 3D Darstellungsformel

$$u(x,t) = \int_{B_t(x)} \varphi_1(y) u_1(y) + \varphi_0(y) u_0(y)\, dy$$

$x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R+1}(0) \Rightarrow B_t(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$

$\Rightarrow$ Darstellungsformel liefert für u und $\tilde{u}$ dasselbe Ergebnis

b) Seien u_0 ~~…~~ $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ AW'e mit

$u_0 \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$

$u_0 \geq 0$ auf $B_1(0)$

$u_0 \not\equiv 0$

u die Lsg von $\partial_t u = \Delta u$ zu AW'en u_0

Starkes Max-Prinzip $u(x,t) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

Also Information aus $B_1(0)$ hat sich nach bel. kurzer Zeit auf $\mathbb{R}^n$ verbreitet.

8) $\psi_k(x) = \sin\left(\frac{k_1 x_1 \pi}{\ell_1}\right) \cdot \;\ldots\; \cdot \sin\left(\frac{k_n x_n \pi}{\ell_n}\right)$

auf $\Omega = (0,\ell_1)\times\ldots\times(0,\ell_n)$

$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k(t)\,\psi_k(x)$ $\qquad \Delta^2 \psi_k = |k|^4 \psi_k$

$(*) \Leftrightarrow a_k''(t) + |k|^4 a_k(t) = -b\,|k|^2 a_k(t)$

$a_k(t) = e^{i\omega_k t} a_k(0)$, $\omega_k \in \mathbb{C}$

Lsg. $\Leftrightarrow$ $-\omega_k^2 + \left(|k|^4 + b|k|^2\right) = 0$

$\omega_k = \sqrt{|k|^4 + b|k|^2}$

Eine Lsg.:

$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k^0\, e^{i\sqrt{|k|^4+b|k|^2}\,t}\, \psi_k(x)$

9) a) $u_k \longrightarrow u$ in $\mathcal{D}'$

$\Rightarrow (\Delta u_k)(\varphi) \overset{\text{Def}}{=} u_k(\underbrace{\Delta\varphi}_{\in C_c^\infty(\Omega)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} u(\Delta\varphi) = (\Delta u)(\varphi)$

Also $f_k \longrightarrow f$ in $\mathcal{D}'$

b) $f_k := f := 0$

$u_k := 1$

$u := 0$

$-\Delta u_k = f_k$ ✓

$-\Delta u = f$ ✓

$u_k \not\longrightarrow u$

Also: Implikation in b) ist falsch.