

Kurzskript Gruppentheorie

Lernhilfe für HöMa IV, 6. Juli 2026

Inhalt ausgewählt und angeordnet von Ben Schweizer

1 Definition

Definition 1.1 (Gruppe). Eine Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung

$$* : G \times G \rightarrow G,$$

so dass gilt:

(G1) (Assoziativität)

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in G.$$

(G2) (Neutrales Element) Es gibt ein Element $e \in G$ mit

$$e * a = a * e = a \quad \forall a \in G.$$

(G3) (Inverses) Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element $a^{-1} \in G$ mit

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Namen. Gilt zusätzlich

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G,$$

so heißt die Gruppe *kommutativ* oder *abelsch*.

Eine Gruppe heißt *endlich*, wenn sie nur endlich viele Elemente hat. Für endliche Gruppen nennen wir die Anzahl der Elemente die *Ordnung* der Gruppe.

Wir verwenden im Folgenden meist $\cdot$ für die Gruppenoperation oder schreiben sogar einfach nur $ab := a \cdot b := a * b$.

Redundanz der Axiome

Lemma 1.2. Sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung. Angenommen, es existiert ein linksneutrales Element $e \in G$, also

$$ea = a \quad \forall a \in G,$$

und zu jedem $a \in G$ existiert ein Linksinverses $a' \in G$ mit

$$a'a = e.$$

Dann ist G bereits eine Gruppe.

Beweis. 1.) Linkskürzungsregel: Für Elemente $a, b, c \in G$ gilt

$$ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

Wir müssen lediglich mit einem Linksinversen a' von a von links multiplizieren und die Assoziativität ausnutzen.

2.) Nun zeigen wir, dass e auch rechtsneutral ist. Für beliebiges $a \in G$ mit Linksinversen a' gilt

$$a'(ae) = (a'a)e = ee = e = a'a,$$

wegen der Linkskürzungsregel also auch $ae = a$. Das Element e ist also beidseitig neutral.

3.) Schließlich zeigen wir, dass a' auch Rechtsinverses von a ist. Es gilt

$$a'(aa') = (a'a)a' = ea' = a' = a'e,$$

also wegen der Linkskürzungsregel $aa' = e$. Also ist a' auch Rechtsinverses von a . □

2 Beispiele

Die Gruppe $\mathbb{Z}_n$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

mit Addition modulo n . Damit ist $(\mathbb{Z}_n, +)$ eine endliche abelsche Gruppe. Sie heißt die zyklische Gruppe. Sie hat die Ordnung n .

Sie ist zyklisch in dem Sinne, dass in der Liste $1, 1+1, 1+1+1, \dots, 0$ alle Elemente genau einmal vorkommen.

Symmetrische Gruppe $\mathbb{S}_n$

$\mathbb{S}_n$ ist die Menge aller Permutationen von

$$\{1, \dots, n\}.$$

Wir schreiben das mathematisch präzise als

$$\mathbb{S}_n := \{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \text{ bijektiv} \},$$

mit der Hintereinanderausführung $f * g := f \circ g$ als Verknüpfung

Die Gruppe wird erzeugt von den Vertauschungen zweier Elemente; damit ist gemeint, dass jede Permutation geschrieben werden kann als eine endliche Hintereinanderausführung von Vertauschungen. Wir schreiben zum Beispiel $(2 \ 5)$ für das Element in $\mathbb{S}_7$, welche so agiert, dass die Einträge 2 und 5 vertauscht werden.

Die Ordnung ist $|\mathbb{S}_n| = n!$ und es gilt: Für $n \geq 3$ ist $\mathbb{S}_n$ nicht abelsch.

Alternierende Gruppe $\mathbb{A}_n$

Die Gruppe $\mathbb{A}_n$ besteht aus allen geraden Permutationen. Eine Permutation heißt gerade, wenn man sie als eine gerade Anzahl von Vertauschungen schreiben kann.

Die alternierende Gruppe $\mathbb{A}_n$ erfüllt $|\mathbb{A}_n| = (n!)/2$.

Diedergruppe $\mathbb{D}_n$

Die Gruppe $\mathbb{D}_n$ beschreibt die Symmetrien eines regelmäßigen n -Ecks. Für $n = 4$ betrachtet man das Quadrat; es hat als Selbstabbildungen die Rotation um 90° , die Rotation um 180° , die Rotation um 270° , die triviale Abbildung e , dazu kommen noch Spiegelungen. Man kann sich überlegen, dass nur eine Spiegelung ein neues Element liefert, andere Spiegelungen können als Kombinationen von Rotationen und der einen Spiegelung geschrieben werden.

Die allgemeine Diedergruppe $\mathbb{D}_n$ wird erzeugt von zwei Elementen

$$r \quad (\text{Rotation}), \quad s \quad (\text{Spiegelung}),$$

mit den Relationen

$$r^n = e, \quad s^2 = e, \quad srs = r^{-1}.$$

Es gilt $|\mathbb{D}_n| = 2n$.

Die Gruppe $\mathbb{Z}$

Die Menge

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

bildet mit der Addition eine unendliche abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $e = 0$, das Inverse von $n \in \mathbb{Z}$ ist $-n$.

Die Gruppe $\mathbb{Z}$ ist keine endliche Gruppe.

Allgemeine lineare Gruppe $GL(n)$

Über dem Körper $\mathbb{R}$ ist

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$$

die Menge aller invertierbaren reellen $n \times n$ -Matrizen. Mit der Matrizenmultiplikation bildet $GL(n, \mathbb{R})$ eine Gruppe. Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix, $e = I_n$.

Für $n \geq 2$ ist $GL(n, \mathbb{R})$ nicht abelsch.

Orthogonale Gruppe $O(n)$

Die orthogonale Gruppe ist definiert durch

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I_n\}.$$

Ihre Elemente beschreiben längenerhaltende lineare Abbildungen des $\mathbb{R}^n$.

Inverse Elemente können angegeben werden mit der einfachen Formel $A^{-1} = A^T$.

Die Gruppe $O(n)$ ist eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$.

Freie Gruppe

Sei X eine Menge von Symbolen (Generatoren).

Die *freie Gruppe* $F(X)$ besteht aus allen reduzierten Wörtern in den Symbolen aus X und ihren formalen Inversen.

Die Gruppenverknüpfung ist die Konkatenation von Wörtern mit anschließender Kürzung von Ausdrücken wie zum Beispiel

$$xx^{-1} = e \quad \text{und} \quad x^{-1}x = e.$$

In der freien Gruppe mit Generatoren $X = \{a, b\}$ ist ein Beispiel für ein Element $a^2ba^{-3}b^4$ und man rechnet zum Beispiel

$$(a^2ba^{-3}b^4) \cdot (b^{-4}a^2ba^{-1}b^4) = a^2ba^{-1}ba^{-1}b^4.$$

3 Untergruppen

Definition 3.1 (Untergruppe). *Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt Untergruppe, falls*

$$(H, *)$$

selbst eine Gruppe ist. Ist H eine Untergruppe von G , so schreiben wir

$$H \leq G.$$

Bemerkung 3.2 (Untergruppenkriterium). *Eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ ist genau dann eine Untergruppe, wenn*

$$ab^{-1} \in H \quad \forall a, b \in H.$$

Beweis. Setze $a = b$. Dann folgt

$$e = aa^{-1} \in H.$$

Mit $a = e$ erhält man

$$b^{-1} \in H.$$

Schließlich folgt

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H.$$

Also sind alle Gruppenaxiome erfüllt. □

Beispiele.

- $\mathbb{D}_n \leq \mathbb{S}_n$
- $H := \{e, (1, 2)\} \leq \mathbb{S}_3$
- $\mathbb{A}_n \leq \mathbb{S}_n$
- $O(n) \leq GL(n)$
- $\mathbb{D}_n \leq O(2)$

4 Nebenklassen

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe, $H \leq G$. Für $g \in G$ heißt

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

(die zu g gehörende) *Linksnebenklasse* von H .

Analog definiert man Rechtsnebenklassen

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}.$$

Satz 4.1. *Die Linksnebenklassen bilden eine Zerlegung von G : Zwei Linksnebenklassen sind entweder identisch oder disjunkt, die Vereinigung aller Linksnebenklassen ist ganz G .*

Beweis. Sind zwei Nebenklassen nicht disjunkt, so existiert

$$x = g_1 h_1 = g_2 h_2.$$

Daraus folgt

$$g_2^{-1} g_1 = h_2 h_1^{-1} \in H,$$

und man erhält

$$g_1 H = g_2 g_2^{-1} g_1 H = g_2 H.$$

Also sind die Linksnebenklassen identisch.

Weiterhin gilt: Jedes Element $g \in G$ liegt in der Linksnebenklasse gH . □

Die Anzahl der Linksnebenklassen von H in G heißt *Index* von H in G und wird mit

$$[G : H]$$

bezeichnet.

Satz 4.2 (Lagrange). *Für endliche Gruppen gilt*

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

Insbesondere teilt die Ordnung einer Untergruppe die Ordnung der Gruppe.

Beweis. Die Linksnebenklassen bilden eine Zerlegung von G .

Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung

$$H \rightarrow gH, \quad h \mapsto gh,$$

bijektiv. Daher besitzt jede Nebenklasse genau $|H|$ Elemente.

Da $[G : H]$ die Anzahl der Nebenklassen bezeichnet, erhält man

$$|G| = \underbrace{|H| + \cdots + |H|}_{[G:H]\text{-mal}} = [G : H] \cdot |H|,$$

wie behauptet. □

5 Normalteiler und Quotientengruppen

Definition 5.1 (Normalteiler). Eine Untergruppe $N \leq G$ heißt Normalteiler, wenn

$$gN = Ng \quad \forall g \in G.$$

Wir schreiben dann

$$N \trianglelefteq G.$$

Äquivalent ist die Formel

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G.$$

Definition 5.2 (Quotientengruppe). Sei $N \trianglelefteq G$. Auf der Menge der Nebenklassen

$$G/N = \{gN \mid g \in G\}$$

definieren wir die Operation

$$(gN)(hN) := (gh)N.$$

Satz 5.3 (Quotientengruppe). Sei $N \trianglelefteq G$. Die Verknüpfung auf G/N ist wohldefiniert und macht G/N zu einer Gruppe.

Beweis. Wir betrachten zwei Linksnebenklassen, die wir beide auf zwei verschiedene Arten schreiben, also

$$gN = g'N, \quad hN = h'N.$$

Dann gibt es $n_1, n_2 \in N$ mit

$$g' = gn_1, \quad h' = hn_2.$$

Wegen der Normalteilereigenschaft kann man n_1h auch schreiben als

$$n_1h = h\tilde{n}$$

mit $\tilde{n} \in N$. Somit gilt

$$g'h' = gn_1hn_2 = gh(\tilde{n}n_2),$$

und daher auch

$$g'h'N = (gh)N.$$

Dies zeigt, dass die Verknüpfung wohldefiniert ist.

Das neutrale Element ist $N = eN$ und das Inverse von gN ist $g^{-1}N$. □

6 Einfache Gruppen

Definition 6.1 (Einfache Gruppe). Eine Gruppe G heißt einfach, wenn

$$\{e\} \quad \text{und} \quad G$$

ihre einzigen Normalteiler sind.

Beispiele.

1. Für jede Primzahl p ist die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_p$ einfach.
2. Die alternierende Gruppe A_n ist für $n \geq 5$ einfach. Dies ist ein grundlegender Satz der Gruppentheorie.
3. Die Gruppe $\mathbb{Z}_n$ ist für nicht-primales n nicht einfach, da sie echte nichttriviale Untergruppen besitzt; diese sind wegen der Kommutativität automatisch Normalteiler.
4. Die Gruppe S_n ist nicht einfach, weil A_n ein Normalteiler ist.

Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen

Satz 6.2. *Jede endliche einfache Gruppe gehört zu genau einer der folgenden Klassen:*

1. *Die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_p$, wobei p eine Primzahl ist.*
2. *Die alternierenden Gruppen A_n mit $n \geq 5$.*
3. *Die Gruppen vom Lie-Typ (z. B. $PSL(n, q)$ und verwandte Familien).*
4. *Die 26 sporadischen einfachen Gruppen.*

Bemerkung. Dieses Resultat wird als *Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen* bezeichnet. Der vollständige Beweis umfasst mehrere tausend Seiten und wurde in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts von vielen Mathematikern erarbeitet.

Die größte sporadische einfache Gruppe ist die sogenannte *Monstergruppe*. Sie besitzt die Ordnung

$$8080174247945128758864599049617107570057543680000000000.$$

7 Gruppenhomomorphismen

Definition 7.1 (Gruppenhomomorphismus). *Seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ Gruppen. Eine Abbildung*

$$\varphi : G \rightarrow H$$

heißt Gruppenhomomorphismus, wenn

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Wenn der Gruppenhomomorphismus eine bijektive Abbildung ist, so nennt man ihn einen Gruppenisomorphismus und nennt die beiden Gruppen isomorph.

Bemerkungen. Für jeden Gruppenhomomorphismus gilt:

$$\varphi(e_G) = e_H,$$

und

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}.$$

Der *Kern* von φ ist

$$\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\},$$

das *Bild* ist

$$\operatorname{im}(\varphi) = \{\varphi(g) \mid g \in G\}.$$

Der Kern ist stets ein Normalteiler von G .

8 Gruppendarstellungen

Definition 8.1 (Darstellung). *Sei G eine Gruppe und V ein Vektorraum über einem Körper K . Eine Darstellung von G auf V ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$\varphi : G \rightarrow GL(V).$$

Falls der Vektorraum eine endliche Dimension hat, also $V = K^n$, so gilt $GL(V) = GL(n, K)$. Die Zahl $\dim(V)$ heißt in diesem Fall der Grad oder die Dimension der Darstellung.

Beispiel. Die Diedergruppe $\mathbb{D}_n$ besitzt eine Darstellung auf $\mathbb{R}^2$, bei der Rotationen und Spiegelungen durch die entsprechenden Matrizen beschrieben werden.

Kern einer Darstellung. Der Kern

$$\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = I\}$$

ist ein Normalteiler von G .

Die Darstellung heißt *treu*, wenn φ injektiv ist, oder, äquivalent, wenn

$$\ker(\varphi) = \{e\}.$$

In diesem Fall kann man G als Untergruppe von $GL(V)$ auffassen.

9 Der Satz von Cayley

Satz 9.1 (Satz von Cayley). *Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.*

Konkreter für endliche Gruppen: Für jede endliche Gruppe G mit $|G| = n$ existiert ein injektiver Gruppenhomomorphismus

$$G \hookrightarrow S_n.$$

Beweis. Für jedes $g \in G$ betrachten wir die Abbildung

$$L_g : G \rightarrow G, \quad x \mapsto gx.$$

Wegen der Existenz von Inversen ist L_g bijektiv und somit ein Element von S_G , der Gruppe aller Permutationen von G .

Die Zuordnung

$$\varphi : G \rightarrow S_G, \quad g \mapsto L_g,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, denn

$$L_g \circ L_h = L_{gh}.$$

Außerdem ist φ injektiv: Aus

$$L_g = L_h$$

folgt insbesondere

$$g = L_g(e) = L_h(e) = h.$$

Daher ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_G .

Für endliche Gruppen mit $|G| = n$ gilt $S_G \cong S_n$. □

10 Die Fundamentalgruppe

Diese Gruppe ist mir wichtig, ich mache dazu viel in der Vorlesung; da man viele Bilder benötigt, ist dieser Teil für dieses Skript etwas zu aufwendig.

Der Kern ist: Für eine Mannigfaltigkeit bildet die Menge der Wege darauf (modulo stetige Verformungen) eine Gruppe, die *Fundamentalgruppe*.

11 Lie-Gruppen

Lie-Gruppen sind Gruppen, die gleichzeitig differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind.

Meist betrachtet man Untermannigfaltigkeiten im Raum der invertierbaren Matrizen, die Gruppenstruktur ist dann durch die Matrixmultiplikation gegeben.

Beispiele für Lie-Gruppen sind: $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $GL(n)$, $SL(n)$.

Im Folgenden werden wir nur beispielhaft über zwei Lie-Gruppen sprechen, die in der Physik wichtig sind.

11.1 Die Lie-Gruppe $SU(2)$ und die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$

Die spezielle unitäre Gruppe ist definiert durch

$$SU(2) = \{U \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid U^*U = I, \det(U) = 1\},$$

die Menge aller unitären 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. Diese Menge bildet mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

Jedes Element besitzt die Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Schreibt man

$$a = x_0 + ix_3, \quad b = x_2 + ix_1,$$

so lautet die Nebenbedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Somit ist $SU(2)$ als Mannigfaltigkeit gerade die dreidimensionale Sphäre

$$SU(2) \cong S^3.$$

Insbesondere ist $SU(2)$ kompakt, zusammenhängend und einfach zusammenhängend.

Die zugehörige Lie-Algebra ist die Menge aller Tangentialvektoren an der Einheitsmatrix:

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid X^* = -X, \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Sie besteht also aus den schieferhermiteschen spurfreien Matrizen.

Die Pauli-Matrizen. Die Pauli-Matrizen sind

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Achtung: Die Pauli-Matrizen sind *keine* Elemente von $\mathfrak{su}(2)$. Aber: Mit einem Faktor i sind sie im richtigen Raum und wir erhalten sogar eine Basis. Die drei Elemente

$$\frac{i}{2}\sigma_1, \quad \frac{i}{2}\sigma_2, \quad \frac{i}{2}\sigma_3 \tag{1}$$

sind eine (oft gewählte) Basis von $\mathfrak{su}(2)$.

Diese Matrizen erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\left[\frac{i}{2}\sigma_j, \frac{i}{2}\sigma_k \right] = -\varepsilon_{jkl} \left(\frac{i}{2}\sigma_l \right).$$

Damit ist die Struktur der Lie-Algebra vollständig beschrieben.

11.2 Die Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ und die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$

Die Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ besteht aus allen orthogonalen reellen 3×3 -Matrizen mit Determinante $+1$, also

$$\mathrm{SO}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^T A = I_3, \det(A) = 1\}.$$

Die Lie-Algebra von $\mathrm{SO}(3)$ besteht aus allen schiefsymmetrischen reellen 3×3 -Matrizen,

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^T = -A\}.$$

Jede solche Matrix besitzt die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist damit auch $\mathfrak{so}(3)$ dreidimensional.

Wählt man als Basis die Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so gelten dieselben Vertauschungsrelationen, nämlich

$$[E_j, E_k] = -\varepsilon_{jkl} E_l.$$

Daher sind die beiden Lie-Algebren isomorph,

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3).$$

Bemerkungen zu Gruppen und Lie-Algebren. Die Lie-Algebren beschreiben nur das lokale Verhalten einer Lie-Gruppe in der Nähe der Einheitsmatrix. Globale topologische Eigenschaften werden nicht erfasst. Verschiedene Lie-Gruppen können daher dieselbe Lie-Algebra besitzen.

Ein Beispiel haben wir oben kennengelernt: Die Lie-Algebren von $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SO}(3)$ sind isomorph. Die Gruppen unterscheiden sich topologisch. Die Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ ist einfach zusammenhängend (und daher übrigens die sogenannte universelle Lie-Gruppe zur Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$). Hingegen ist $\mathrm{SO}(3)$ nicht einfach zusammenhängend, es besitzt die nichttriviale Fundamentalgruppe

$$\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2.$$

Dies ist übrigens eine spannende Fundamentalgruppe: Es gibt einen nichttrivialen Weg, aber wenn man diesen zweimal durchläuft, so ist das Ergebnis ein trivialer Weg. Für uns hier nur wichtig: Die beiden Gruppen können nicht isomorph sein.

Wir werden im nächsten Abschnitt einen interessanten Zusammenhang kennenlernen: $\mathrm{SU}(2)$ liefert eine zweiblättrige Überlagerung von $\mathrm{SO}(3)$.

11.3 Die Überlagerungsabbildung

Vorweg: Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ ist ein dreidimensionaler reeller Vektorraum, wir identifizieren daher $\mathfrak{su}(2)$ mit $\mathbb{R}^3$.

Jedes Element $U \in \mathrm{SU}(2)$ wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{su}(2)$:

$$L_U : X \mapsto UXU^{-1}.$$

Die Abbildung $L_U : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ besitzt folgende drei Eigenschaften: (i) Sie ist linear. (ii) Sie erhält die Lie-Klammer. (iii) Sie erhält das Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}(XY).$$

Damit beschreibt L_U eine orthogonale lineare Abbildung des dreidimensionalen Raumes. Insofern ist L_U eine Drehung im $\mathbb{R}^3$, ein Element von $\mathrm{O}(3)$.

Da $\mathrm{SU}(2)$ zusammenhängend ist und die Determinante stetig von U abhängt, muss L_U sogar orientierungserhaltend sein. Sie ist also ein Element von $\mathrm{SO}(3)$. Somit liefert einem die Abbildung $U \mapsto L_U$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3).$$

Dabei gilt: Die beiden Matrizen U und $-U$ induzieren dieselbe Konjugationsabbildung, denn

$$(-U)X(-U)^{-1} = UXU^{-1}.$$

Der Kern von ρ ist daher nicht trivial. Tatsächlich kann man zeigen, dass

$$\ker(\rho) = \{\pm I_2\}.$$

Jede Drehung des dreidimensionalen Raumes kann durch ρ erhalten werden, die Abbildung ist also surjektiv. Damit erhält man

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}.$$

Jede räumliche Drehung $R \in \mathrm{SO}(3)$ besitzt genau zwei Urbilder in $\mathrm{SU}(2)$: Wenn U die Eigenschaft $\rho(U) = R$ hat, so gilt auch $\rho(-U) = R$.

11.4 Spin

An dieser Stelle verlasse ich die Mathematik. Ich muss ab jetzt Erklärungen aus Skripten und von der KI wiedergeben, ohne dass ich alle Aussagen verstehen würde. Ich konnte allerdings nicht widerstehen, die Erklärungen (aus meiner Sicht) konsistenter zu machen; ich hoffe, dabei habe ich sie nicht verschlechtert.

In der klassischen Mechanik werden räumliche Drehungen durch die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ beschrieben. So kann zum Beispiel eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit einer Matrix $R \in \mathrm{SO}(3)$ transformiert werden zu $R^{-1} \circ f \circ R$. Insofern wirkt $\mathrm{SO}(3)$ auf dem Raum der Funktionen. Man hat eine Darstellung von $\mathrm{SO}(3)$ erhalten.

Eine Idee dahinter: Man kann die transformierte Funktion als im Grunde dieselbe Funktion ansehen; sie wird nur in einem anderen Koordinatensystem beschrieben.

In der Quantenmechanik werden die Zustände eines Teilchens durch Vektoren in einem komplexen Hilbertraum beschrieben. Die Wirkung einer räumlichen Drehung auf einen solchen Quantenzustand wird durch eine Darstellung der Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ beschrieben.

Die kleinste nichttriviale Darstellung von $SU(2)$ ist die zweidimensionale Standarddarstellung, die wir oben verwendet haben. Ihre Elemente heißen *Spinoren*. Der Spinor eines Elektrons enthält neben einer Drehung auch noch ein ± 1 -Element, den Spin.

Wir verwenden nun für $n \in \mathbb{R}^3$ das $\mathfrak{su}(2)$ -Element $\frac{i}{2} n \cdot \sigma = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_j$. Die Exponentialabbildung ist auf Mannigfaltigkeiten durch Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung definiert, ganz so, wie $\exp(tA)y_0 = y(t)$ die Lösung von $y' = Ay$ beschreibt. Mit diesen Notationen sagt die Physik-Theorie: Eine Drehung um den Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ um die Achse $n \in \mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch

$$U(\theta, n) = \exp\left(\theta \left(-\frac{i}{2} n \cdot \sigma\right)\right) \in SU(2).$$

Man bewegt sich gewissermaßen entlang der gewählten Linearkombination der Basisvektoren um die Weglänge θ . Durch den Faktor $\frac{1}{2}$ im Exponenten ergibt sich:

$$U(2\pi) = -I, \quad U(4\pi) = I.$$

Ein Spinor erhält nach einer Drehung um 360° also sein ursprüngliches Vorzeichen nicht zurück. Erst nach einer Drehung um 720° stimmt der Zustand wieder mit dem Anfangszustand überein.

Dieser Vorzeichenwechsel ist kein Widerspruch, denn Zustände, die sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, beschreiben in der Quantenmechanik denselben physikalischen Zustand. Experimentell macht sich dieses zusätzliche Vorzeichen jedoch bemerkbar, sobald Interferenzeffekte auftreten.