

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 9.1 (Bilder und Urbilder von Gruppenhomomorphismen; 10 Punkte). Es seien $(G, *)$ und $(H, \#)$ zwei Gruppen mit Untergruppen $U \leq G$ und $V \leq H$. Weiter sei $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass

- a) $f(U) = \{f(u) \in H \mid u \in U\} \leq H$.
- b) $f^{-1}(V) = \{g \in G \mid f(g) \in V\} \leq G$.

Aufgabe 9.2 (Der Homomorphiesatz; 10 Punkte). Es seien $(G, *)$ und $(H, \#)$ Gruppen und $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.

- a) Zeigen Sie, dass die Menge $\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ ein Normalteiler in G ist.
- b) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $\ker(f) = \{e_G\}$ gilt.
- c) Zeigen Sie, dass $G/\ker(f) \cong f(G)$.

Aufgabe 9.3 (Berechnung einer Quotientengruppe; 10 Punkte). Wir betrachten die Gruppen $O(n)$ und $SO(n)$ aus Aufgabe 7.3.

- a) Zeigen Sie, dass $SO(n)$ ein Normalteiler in $O(n)$ ist.
- b) Zeigen Sie, dass $O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Abgabe am 24.06.2026 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.