

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 8.1 (Gruppen der Ordnung 3; 10 Punkte). Wir betrachten eine Gruppe $(G, *)$ mit $|G| = 3$ und neutralem Element e . Zeigen Sie, dass $(G, *)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}_3, + \text{ modulo } 3)$ ist.

Aufgabe 8.2 (Abelsche Gruppen; 5 Punkte). Es sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Weiter gelte $a * a = e$ für jedes $a \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 8.3 (Gruppenaxiome; 5 Punkte). Wir betrachten die Menge $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit der Verknüpfung

$$*: (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad a * b = a + b - ab.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 8.4 (Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{F}_p$; 10 Punkte). Wir definieren für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{F}_p^* := \{1, 2, \dots, p-1\}$ und betrachten darauf die Multiplikation Modulo p :

$$\odot: \mathbb{F}_p^* \times \mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^*, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \text{ modulo } p.$$

a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\odot$ auf $\mathbb{F}_p^*$ wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}_p^*, \odot)$ eine Gruppe bildet.

Anleitung für das Inverse: Betrachten Sie für ein beliebiges aber festes $a \in \mathbb{F}_p^*$ den Ausschnitt aus der Cayley-Tafel

$$\begin{array}{c|cccccc} \odot & 1 & 2 & 3 & \dots & p-2 & p-1 \\ \hline a & 1 \odot a & 2 \odot a & 3 \odot a & \dots & (p-2) \odot a & (p-1) \odot a \end{array}.$$

Nehmen Sie dann an, dass zwei Elemente $z, w \in \mathbb{F}_p^*$ mit $z > w$ und $z \odot a = w \odot a$ existieren. Bringen Sie dies auf einen Widerspruch. Folgern Sie daraus, dass ein $v \in \mathbb{F}_p^*$ existieren muss mit $v \odot a = 1$.

- c) Überlegen Sie sich, ob die obige Konstruktion auch für eine Zahl $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ möglich ist, die keine Primzahl ist.
-

Abgabe am 17.06.2026 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.