

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV

Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 7.1 (Greensche Funktion für den Halbraum; 10 Punkte). Wir betrachten den Halbraum $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ definieren wir den gespiegelten Punkt $\tilde{x} := (x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$. Weiter definieren wir $G: \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(\tilde{x} - y).$$

Zeigen Sie, dass $-\Delta_y G(x, \cdot) = \delta_x$ im Distributionssinn auf $\mathbb{R}_+^n$ und $G(x, y) = 0$ für alle $x \in \partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ gilt. Es sei $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$. Wir definieren

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}_+^n} G(x, y) f(y) \, dy.$$

Zeigen Sie, dass u eine Lösung ist von

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}_+^n \quad \text{mit} \quad u = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Aufgabe 7.2 (Elementare Gruppen; 10 Punkte).

- a) Zeigen Sie, dass die Menge $U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ mit der komplexen Multiplikation $\cdot$ eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe abelsch?
- b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}$ der *ganzen Zahlen* mit der Verknüpfung $\oplus: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $a \oplus b := a + b + 1$ eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe abelsch?

Aufgabe 7.3 (Matrizengruppen; 10 Punkte). Es sei $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(n) &:= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathrm{O}(n) &:= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I_n\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathrm{SO}(n) &:= \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

mit der Matrizenmultiplikation $\cdot$ als Verknüpfung Gruppen bilden. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Gruppe $U(1)$ aus Aufgabe 7.2a und der Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ her. *Hinweis:* Wie können Sie eine komplexe Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ als Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ darstellen?