

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 6.1 (Distributionelle Richtungsableitungen; 10 Punkte). Wir betrachten die Funktion $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und die zweidimensionale *Heaviside-Funktion* $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 & \text{für } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{für } x_2 < 0 \end{cases}, \quad H(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{für } x_2 < 0 \end{cases}$$

Weiter definieren wir die Menge $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ und die Abbildung

$$\lambda: \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda(\varphi) = \int_{\Gamma} x_1 \varphi(x) \, dx.$$

a) Zeigen Sie, dass $\partial_1 \langle u \rangle = \langle H \rangle$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\partial_2 \langle u \rangle = \lambda$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ gilt.

Aufgabe 6.2 (Eigenschaften von Distributionen; 10 Punkte). Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ eine Distribution mit distributioneller Ableitung $u' = 0$. Weiter sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine Testfunktion.

a) Zeigen Sie, dass es genau dann eine Testfunktion $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi' = \varphi$ gibt, wenn $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dx = 0$ gilt.

b) Folgern Sie aus a), dass für Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dx = 0$ auch $u(\varphi) = 0$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$u(\varphi) = c \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Hinweis: Es sei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine Testfunktion mit $\int_{\mathbb{R}} \chi(x) \, dx = 1$. Definieren Sie die Testfunktion

$$\tilde{\varphi} := \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dx \right) \chi$$

und berechnen Sie $u(\tilde{\varphi})$.

Aufgabe 6.3 (Lösungseigenschaften des Newton-Potentials; 10 Punkte). Zeigen Sie, dass

$$-\Delta\Phi = \delta_0$$

im Distributionssinn auf $\mathbb{R}^n$ gilt. Es soll ein anderer Beweis als in der Vorlesung geführt werden. In dieser Übung soll die Zwiebelintegration aus Aufgabe 2.2 auf den Ausdruck

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Phi(x) \cdot \nabla\varphi(x) \, dx$$

angewandt werden.

Hinweise: Die radiale Ableitung einer Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $x \neq 0$ definiert durch

$$\partial_r\varphi(x) := \nabla\varphi(x) \cdot \frac{x}{|x|}.$$

a) Verwenden Sie die Eigenschaft $\partial_r\Phi(r) = -\frac{1}{|\partial B_r(0)|}$ der Fundamentallösung.

b) Verwenden Sie Mittelwertintegrale

$$\oint_{\partial B_r(0)} \varphi(y) \, dS(y) := \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} \varphi(y) \, dS(y) = \oint_{\partial B_1(0)} \varphi(ry) \, dS(y).$$

c) Zeigen und verwenden Sie die Formel

$$\oint_{\partial B_r(0)} \partial_r\varphi(y) \, dS(y) = \partial_r \left(\oint_{\partial B_r(0)} \varphi(y) \, dS(y) \right).$$

Abgabe am 27.05.2026 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.