

Übungen zur Vorlesung  
**Höhere Mathematik IV**  
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

**Aufgabe 5.1** (Darstellungsformel der Wärmeleitungsgleichung; 10 Punkte). Wir betrachten für  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) &= f(x, t) . \\ u(x, 0) &= 0 .\end{aligned}$$

Weiter sei  $\Phi: \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  die Fundamentallösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Für jedes  $t \in (0, \infty)$  definieren wir die Abbildung  $S(t): u_0 \mapsto S(t)u_0$  durch

$$[S(t)u_0](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) \, dy .$$

Folgern Sie die Darstellungsformel der Wärmeleitungsgleichung im  $\mathbb{R}^n$  aus der Vorlesung (Tafel 5 der Vorlesung vom 11.05.2026) mit der folgenden Formel der Variation der Konstanten:

$$u(x, t) = \int_0^t [S(t-s)f(\cdot, s)](x) \, ds .$$

**Aufgabe 5.2** (Wellengleichung in charakteristischen Variablen; 10 Punkte). Es sei  $u: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $c > 0$ . Wir definieren  $\xi := x - ct$  und  $\eta := x + ct$  sowie die Funktion  $U = U(\xi, \eta)$  durch  $u(x, t) = U(x - ct, x + ct)$ . Zeigen Sie, dass

$$\partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\eta \partial_\xi U(\xi, \eta) = 0 .$$

Folgern Sie aus  $\partial_\eta \partial_\xi U(\xi, \eta) = 0$ , dass zwei Funktionen  $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existieren mit

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) .$$

**Aufgabe 5.3** (Wellengleichung mit Dirichlet-Randbedingungen; 10 Punkte). Bestimmen Sie für  $(x, t) \in (0, 2) \times (0, \infty)$  die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) &= 0 , \\ u(0, t) &= 0 = u(2, t) , \\ u(x, 0) &= x \quad \text{und} \quad \partial_t u(x, 0) = 0 .\end{aligned}$$