

Übungen zur Vorlesung  
Höhere Mathematik IV  
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

**Aufgabe 4.1** (Wärmeleitungsgleichung; 10 Punkte). Bestimmen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) && \text{für } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

*Anleitung:* Bilden Sie die Fouriertransformierte  $\hat{u}(\omega, t)$  von  $u(x, t)$  und lösen Sie für jedes  $\omega \in \mathbb{R}$  die zugehörige gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswerten  $\hat{u}(\omega, 0) = \mathcal{F}[u(\cdot, 0)](\omega)$ .

**Aufgabe 4.2** (Wärmeleitungsgleichung mit Randbedingungen; 10 Punkte). Bestimmen Sie für  $(x, t) \in (0, \pi/2) \times (0, \infty)$  die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) - \frac{1}{4} \partial_x^2 u(x, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= \sin(x) + \sin(2x) + \cos(3x), \\ u(0, t) &= \exp\left(-\frac{9t}{4}\right) \quad \text{und} \quad u(\pi/2, t) = \exp\left(-\frac{t}{4}\right).\end{aligned}$$

*Anleitung:* Bestimmen Sie zwei Funktionen  $u_L, u_R: (0, \pi/2) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  vom Typ

$$\begin{aligned}u_L(x, t) &= \cos(\mu x) \exp\left(-\frac{\mu^2 t}{4}\right) && \text{mit } u_L(0, t) = \exp\left(-\frac{9t}{4}\right), \\ u_R(x, t) &= \sin(\nu x) \exp\left(-\frac{\nu^2 t}{4}\right) && \text{mit } u_R(\pi/2, t) = \exp\left(-\frac{t}{4}\right).\end{aligned}$$

Lösen Sie dann für  $(x, t) \in (0, \pi/2) \times (0, \infty)$  das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\partial_t u_A(x, t) - \frac{1}{4} \partial_x^2 u_A(x, t) &= 0, \\ u_A(x, 0) &= \sin(x) + \sin(2x) + \cos(3x) - u_R(x, 0) - u_L(x, 0)\end{aligned}$$

mit den homogenen Randbedingungen  $u_A(0, t) = 0 = u_A(\pi/2, t)$  für alle  $t \in (0, \infty)$ . Die Lösung  $u$  der Wärmeleitungsgleichung ist dann gegeben durch  $u = u_A + u_L + u_R$ .

**Aufgabe 4.3** (Maxwell-Gleichungen; 10 Punkte).

- a) Es sei  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren den vektorwertigen Laplace-Operator durch  $\Delta V := (\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)$ . Zeigen Sie die Identität

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} V) = -\Delta V + \nabla(\operatorname{div} V).$$

- b) Es seien  $E, H: \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  zweimal stetig differenzierbare Lösungen der Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x E(x, t) &= 0, & \partial_t E(x, t) &= \operatorname{rot}_x H(x, t), \\ \operatorname{div}_x H(x, t) &= 0 & \partial_t H(x, t) &= -\operatorname{rot}_x E(x, t). \end{aligned}$$

Die beiden Operatoren  $\operatorname{div}_x$  und  $\operatorname{rot}_x$  beziehen sich jeweils nur auf die Ortsvariable  $x$ . Zeigen Sie, dass  $E$  und  $H$  die folgenden Wellengleichungen lösen:

$$\partial_t^2 E - \Delta E = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t^2 H - \Delta H = 0.$$

---

Abgabe am 13.05.2026 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.