

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 3.1 (Dirichlet-Problem auf dem Außenraumgebiet; 10 Punkte). Es sei $R > 0$ ein Radius, $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $g \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R})$. Konstruieren Sie mittels Fourierreihen eine Lösung des *Dirichlet-Problems*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega = \partial B_R(0). \end{aligned}$$

Hinweis: Übersetzen Sie das Dirichlet-Problem in Polarkoordinaten. Nutzen Sie dafür die Funktionen

$$U(r, \varphi) := u(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \quad \text{und} \quad G(\varphi) := g(R \cos(\varphi), R \sin(\varphi)).$$

Entwickeln Sie dann die Funktion G in eine Fourierreihe.

Aufgabe 3.2 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen; 10 Punkte). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\Delta u = 0$ in Ω und $B_r(x) \subset \Omega$ für $r > 0$ und $x \in \Omega$. Weiter sei $\varphi: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Gewichtsfunktion mit $\int_{B_r(0)} \varphi(|x|) dx = 1$.

a) Zeigen Sie die Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) \varphi(|y - x|) dy.$$

b) Zeigen Sie, dass u unendlich oft stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 3.3 (Diffusionsgleichung; 10 Punkte). Bestimmen Sie für $(x, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u - 9 \partial_x^2 u &= 0, \\ \partial_x u(0, t) &= \partial_x u(2\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1 - \cos(2x). \end{aligned}$$