

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 2.1 (Ein Randwertproblem; 10 Punkte). Es sei $B_3(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 3\}$ und u die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 \quad \text{für } x \in B_3(0), \\ u(3 \cos(\theta), 3 \sin(\theta)) &= 4 \sin(\theta) - \cos(2\theta) + 7 \quad \text{für } \theta \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die Lösung u in Polarkoordinaten $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.
- Bestimmen Sie die Lösung u in kartesischen Koordinaten (x_1, x_2) .

Aufgabe 2.2 (Zwiebelintegration; 10 Punkte). Es sei $n \in \mathbb{N}$ die Dimension, $R > 0$ ein Radius und $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$. Beweisen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Formel

$$\int_{B_R(0)} f \, dV = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f \, dS \, dr.$$

Anleitung: Definieren Sie $T_R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Rx$ und damit $(f \circ T_R)(x) = f(Rx)$, um die linke Seite als Integral über $B_1(0)$ zu schreiben. Differenzieren Sie die zu vergleichenden Ausdrücke nach R . Ein Integral der Form

$$\int_{B_1(0)} (\nabla f) \circ T_R(x) \cdot x \, dx$$

wird mit partieller Integration behandelt.

Aufgabe 2.3 (Lösungseigenschaft der Fundamentallösung; 10 Punkte). Im Raum $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ definieren wir die Funktion $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} \ln(|x|) & \text{für } n = 2, \\ |x|^{-(n-2)} & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\Delta \Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.